Université Paul Sabatier | Année 2017–2018
L3 Enseignement, module Analyse 2 | Semestre 6

TD5 : Courbes paramétrées

1 Construction de courbes

1.1 L'astroide

1) a est un réel strictement positif donné. Étudier et construire la courbe de paramétrisation :

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} .$$

2) Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection de la tangente au point courant $M(t)$ avec respectivement (Ox) et (Oy). Calculer la longueur $A(t)B(t)$.

1.2 La cycloide

1) Un cercle $(\mathcal{C})$, de rayon $R > 0$, roule sans glisser sur l'axe (Ox). On note I le point de contact entre $(\mathcal{C})$ et (Ox) et on note Ω le centre de $(\mathcal{C})$ (Ω et I sont mobiles). M est un point donné de $(\mathcal{C})$ (M est mobile, mais solidaire de $(\mathcal{C})$). On pose $t = (\widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}})$.

Déterminer une paramétrisation de la courbe décrite par le point M (on prendra t pour paramètre).

2) Etudier et construire l'arc paramétré :

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

où R est un réel strictement positif donné.

1.3 La lemniscate de Bernoulli

Étudier et construire l'arc paramétré :

$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases} .$$

1.4 Des exemples académiques

Construire les courbes de paramétrisations :

$$\begin{cases} x = \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} \\ y = \frac{t^2}{t^2-1} \end{cases} \quad \begin{cases} x = (t+2)e^{1/t} \\ y = (t-2)e^{1/t} \end{cases} \quad \begin{cases} x = (t-1)\ln(|t|) \\ y = (t+1)\ln(|t|) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t+2}{1-t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{t}{t^2-1} \\ y = \frac{t+2}{(t-1)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{t^3}{t^2-9} \\ y = \frac{t(t-2)}{t-3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{t^3}{1+3t} \\ y = \frac{3t^2}{1+3t} \end{cases} \quad \begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{cases}$$

2 Des problèmes géométriques

2.1 Tractrices

1) Trouver les trajectoires orthogonales la famille des cercles de rayon R ($R > 0$ donné) et centrés sur (Ox).

2) Etudier et construire l'arc paramétré :

$$\begin{cases} x = R(\ln|\tan\frac{t}{2}| + \cos t) \\ y = R\sin t \end{cases}$$

où R est un réel strictement positif donné.

2.2 Courbure, développante

Déterminer le rayon de courbure en tout point de chacune de l'astroide, de la cycloide et de la lemniscate.

Déterminer la développante de la cycloide qui passe par le milieu d'une arche.

2.3 Droites tangentes et normales à un arc

Trouver les droites à la fois tangentes et normales à l'arc paramétré :

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 4t^3 \end{cases} .$$

2.4 Courbe orthoptique

La courbe orthoptique d'une courbe $(\mathcal{C})$ est le lieu des points du plan d'où l'on peut mener (au moins) deux tangentes à $(\mathcal{C})$, orthogonales. Déterminer l'orthoptique de $(\mathcal{C})$ dans chacun des cas suivants :

1) $(\mathcal{C})$ est un astroide de paramétrisation

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} ,$$

avec $a > 0$ donné.

2) $(\mathcal{C})$ est l'arc paramétré :

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = 2t^3 - 3t^2 \end{cases} .$$

3) $(\mathcal{C})$ est l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

avec $a, b > 0$.

2.5 Développante

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, on considère un cercle C de centre $O = (0,0)$ de rayon R. Donner une paramétrisation de la développante Γ de C passant par le point $(R, 0)$.

Soit Γ' la translatée de Γ de vecteur $(0, 2\pi R)$. Justifier que Γ et Γ' sont tangentes et que le point de tangence est sur l'axe vertical T d'équation $x = R$, et la tangente commune horizontale.

Soit Γ" la symétrique de Γ' par rapport à T. Justifier que Γ et Γ" sont tangentes. Quel est l'intéret mécanique de cette propriété ?

Que se passe-t-il si on considère des développantes de cercles de rayons différents ?

2.6 Questions de distance

Soit T l'intersection de (Ox) et de la tangente en M et H le projeté orthogonal de M sur (Ox). Trouver les courbes telles que

1) $MT = a$ ($a > 0$ donné)

2) $HT = a$ (sans rapport avec 1))

3 Courbes en coordonnées polaires

3.1 la cardioide

La cardioide décrit la trajectoire d'un point fixé à un cercle qui roule sans glisser sur un second cercle de même diamètre. Son équation en coordonnées polaires est

$$r = a(1 + \cos\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

La tracer.

3.2 Spirale logarithmique

Soit Γ une spirale logarithmique, c'est à dire une courbe donnée en coordonnées polaires par $\rho = e^{a\theta}$ ($a \in \mathbf{R}$ donné).

1) Soit $M \in \Gamma$, que dire de l'angle entre la droite (OM) et la tangente Γ en M. Montrer que cette propriété caractérise les spirales logarithmiques.

2) Calculer l'abscisse curviligne le long d'une spirale logarithmique.

3) Si on fait rouler une spirale logarithmique sur une droite horizontale, quelle est la trajectoire du centre ?

4) En déduire qu'on peut former une engrenage avec deux spirales logarithmiques de même raison.