TD 6 : Schémas numériques pour les équations différentielles

Exercice 1 (**Théorème de Cauchy-Lipchitz global**). Soient $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction M-lipschitzienne c'est-à-dire vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant M\|x - y\|,$$

où M est une constante positive. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$ une donnée initiale. On cherche à résoudre l'‘’équation différentielle

$$u'(t) = f(u(t)), \quad t \geqslant 0, \qquad u(0) = u_0. \tag{1}$$

On introduit l'espace de Banach suivant

$$E = \left\{u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n \text{ continue telle que } \sup_{t\in\mathbb{R}^+}(\|u(t)\|e^{-2Mt}) < +\infty\right\},$$

muni de sa norme

$$\|u\|_E = \sup_{t\in\mathbb{R}^+}(\|u(t)\|e^{-2Mt}),$$

et Φ l'application définie par

$$(\Phi(u))(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s))ds.$$

1. Montrer que pour tout $u, v \in E$,

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_E \leqslant \frac{1}{2}\|u - v\|_E.$$

2. En appliquant le théorème du point fixe, montrer que Φ a un unique point fixe dans E.
3. En déduire que l'équation différentielle (1) admet une unique solution dans l'espace E.
4. *Application.* Montrer l'existence de solutions aux équations différentielle linéaires autonomes.

Exercice 2 (**Méthode d'Euler linéaire**). On considère l'équation différentielle linéaire

$$u'(t) = -150u(t) + 30, \qquad u(0) = 1.$$

1. Donner la solution explicite de cette équation et montrer que $u(t)$ converge vers $1/5$ quand t tend vers $+\infty$.
2. Écrire le schéma d'Euler explicite associé à cette équation. On notera $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite construite à partir de la méthode d'Euler.
3. Trouver une relation de récurrence entre $u_{n+1} - 1/5$ et $u_n - 1/5$.
4. En déduire u_n.
5. Pour quelle valeur de h a t-on,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1/5.$$

Exercice 3 (**Convergence de la méthode d'Euler**). Soient $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. On note u la solution de l'équation différentielle :

$$u'(t) = f(u(t)), \quad t \geqslant 0, \qquad\qquad u(0) = u_0.$$

Soit $h > 0, t_n = nh$ et $u_n = u(t_n)$. On suppose que n est tel que $t_n \in [0, T]$. On rappelle que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ issue de la méthode d'Euler est définie par

$$v_{n+1} = (t_{n+1} - t_n)f(v_n) + v_n, \qquad v_0 = u_0.$$

1. Établir l'inégalité
$$|u_{n+1} - v_{n+1}| \leqslant (1 + Ch)|u_n - v_n| + Mh^2,$$
où C, M sont des constantes positives.
2. Soit $\delta_n = (1 + Ch)^{-n}|u_n - v_n|$. Montrer que
$$\delta_{n+1} \leqslant \delta_n + \frac{Mh^2}{(1 + Ch)^{n+1}}.$$
3. En déduire que $\delta_n \leqslant \frac{M}{C}h$.
4. Soient $N \geqslant 1$ et $h = T/N$. Montrer que pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$,
$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{Me^{CT}}{C}h.$$

Exercice 4 (**Un système Hamiltonien**). Soit $U, V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ des fonctions telles que $\nabla U, \nabla V$ sont lipchitzienne. On considère le système d'inconnue (p, q) :

$$\begin{cases} p'(t) &= -\nabla U(q(t)), \\ q'(t) &= \nabla V(p(t)). \end{cases}$$

On introduit le schéma numérique suivant. Soit (p_n, q_n) la suite définie par

$$\begin{cases} p_{n+1} - p_n &= -h\nabla U(q_n), \\ q_{n+1} - q_n &= h\nabla V(p_{n+1}). \end{cases}$$

1. Montrer que ce schéma peut s'écrire comme un schéma à un pas du type
$$v_{n+1} = v_n + h\,\varphi(t_n, v_n, h),$$
avec $v_n = (p_n, q_n)$ et φ est une fonction à expliciter.
2. Montrer que ce schéma est convergeant.
3. Appliquer ce schéma au problème du pendule $x'' = -\sin x$.

Exercice 5 (**Schémas numériques et quantités conservées**). On considère le système

$$\begin{cases} p'(t) &= -q^2(t), \\ q'(t) &= p(t)q(t). \end{cases}$$

1. Si (p, q) est une solution du système, montrer que la fonction $p^2 + q^2$ est constante.
2. Les méthodes d'Euler explicites et implicites conservent-elles cette propriété ?
3. On considère le schéma numérique définie par
$$\begin{cases} p_{n+1} &= p_n - hq_n\frac{q_n+q_{n+1}}{2}, \\ q_{n+1} &= q_n + hq_n\frac{p_n+p_{n+1}}{2}. \end{cases}$$
Montrer que ce schéma conserve la quantité de la première question.