Contrôle continu d'Algèbre 1

La rédaction doit être soignée et l'argumentation précise, la plus détaillée possible

enonces

Exercice 1

1. Ce syllogisme est-il valide (justifier la réponse) ? :

   Aucune vache béarnaise n'est de race gasconne

   Toutes les vaches de race gasconne ne sont pas dans le Saint-Gaudinois

   Il existe des vaches béarnaises qui ne sont pas dans le Saint-Gaudinois

2. Même question pour celui-ci :

   Tous les bonimenteurs sont comiques

   Il existe des comiques qui ne font pas rire

   Certains bonimenteurs ne font pas rire

Exercice 2

On considère les assertions : $\left\{ \begin{array}{ll} i) & \forall\, x \in E,\ (P(x) \implies Q(x)) \\ ii) & (\forall\, x \in E,\ P(x)) \implies (\forall\, x \in E,\ Q(x)) \end{array} \right.$

a) Est-ce que $i) \implies ii)$?

b) Est-ce que $ii) \implies i)$?

Si l'assertion est vraie, on la prouvera ; si elle est fausse, on le montrera sur un exemple.

Exercice 3

On rappelle que $\|$, le connecteur de Pierce, est le connecteur de *rejet* : « NOR » ou « NON OU » ; il est donc défini par l'équivalence logique : $(P \parallel Q) \equiv \neg(P \vee Q)$.

1. Ecrire la table de vérité de $\|$.
2. Est-il vrai que

$i)$ $\neg P \equiv (P \parallel P)$?

$ii)$ $P \vee Q \equiv ((P \parallel Q) \parallel (P \parallel Q))$?

3. Pareillement, écrire $P \wedge Q$ et $P \Longrightarrow Q$ en utilisant uniquement le connecteur $\|$.

Exercice 4

Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On notera $cl(x)$ la classe d'équivalence d'un élément x de E pour cette relation d'équivalence (ou $cl_{\mathcal{R}}(x)$ si on veut être plus précis). Un représentant d'une classe $\alpha \in E/\mathcal{R}$ est un x de E tel que $cl(x) = \alpha$. Une famille $F \subset E$ est une une `famille minimale de représentants de` $E/\mathcal{R}$ si pour toute classe d'équivalence α dans $E/\mathcal{R}$, il existe un unique x dans F tel que $cl(x) = \alpha$.

On rappelle que $\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E et soit $A \subset E$, une partie de E fixée.

1. On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}_1$ définie sur $\mathscr{P}(E)$ par

$$X \,\mathcal{R}_1\, Y \iff X \cap A = Y \cap A$$

Vérifier que $\mathscr{P}(A)$ est une famille minimale de représentants de $E/\mathcal{R}_1$.

2. On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}_2$ définie sur $\mathscr{P}(E)$ par

$$X \,\mathcal{R}_2\, Y \iff X \cup A = Y \cup A$$

Trouver une famille minimale de représentants de $E/\mathcal{R}_2$ (en justifiant la réponse).

3.a. Montrer que pour toutes les parties X, Y, Z, W de E, on a $\left.\begin{array}{l} X \setminus Y \subset W \\ Y \setminus Z \subset W \end{array}\right\} \implies X \setminus Z \subset W$

3.b. Montrer que la relation $\mathcal{R}_3$ définie sur $\mathscr{P}(E)$ par

$$X \,\mathcal{R}\, Y \iff X \Delta Y \subset A$$

est une relation d'équivalence (on rappelle que $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$).

3.c. Montrer que pour toutes les parties X, Y de E, on a : $X \Delta (X \setminus Y) = X \cap Y$

3.d. Montrer que $\mathscr{P}(E \setminus A)$ est une famille minimale de représentants de $E/\mathcal{R}_3$.

Exercice 5

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sur E, on définit la relation

$$f \preceq g \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\; f(x) \leq g(x)$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. Est-ce une relation d'ordre total ?

2. Comparer les assertions « `f est majorée` » (comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et « $\{f\}$ `est strictement majoré` » (où « $\{f\}$ `est strictement majoré` » signifie qu'il existe dans E une fonction g telle que $f \preceq g$ et $f \neq g$).

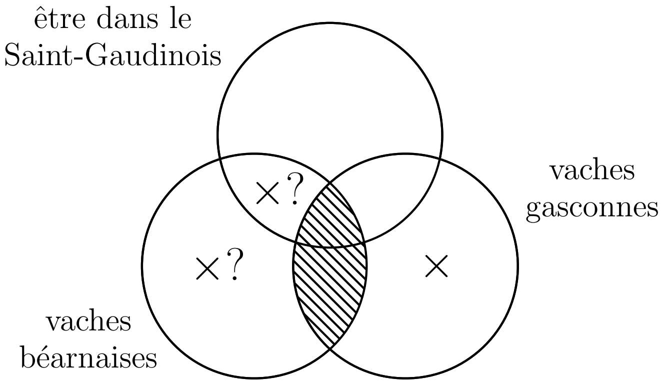
3. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille majorée de fonctions de E. Montrer qu'elle admet une borne supérieure (indication : on utilisera la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$).

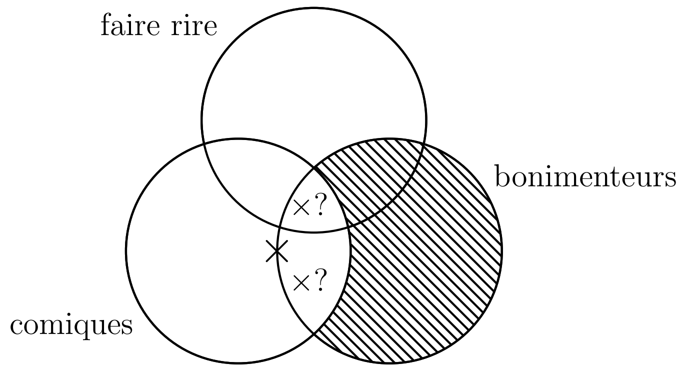
BARÈME APPROXIMATIF : 2 - 2 - 3 - 8 - 5

UT3 / L3 E / Algèbre 1 / **Correction du partiel du 04 novembre 2016**

Exercice 1 : Auncun des deux syllogismes n'est valide. Dans le cas 1., rien ne permet de conclure s'il y a (ou pas) des vaches béarnaises dans la Saint-Gaudinois.

Dans le cas 2., rien ne permet de conclure non plus qu'il existe des bonimenteurs qui ne font pas rire (le fait qe l'on sache qu'il existe des comiques qui ne font pas rire ne suffit pas...).





Exercice 2 : a) L'implication $i) \implies ii)$ est vraie. En effet, supposons que pour tout e de E, $P(e)$ est vraie et soit $x \in E$. On a donc supposé, en particulier, que $P(x)$ est vraie et d'après $i)$, cela entraîne que $Q(x)$ est vraie. On a donc bien vérifié que, pour tout x de E, $Q(x)$ est vraie.

b) L'implication $ii) \implies i)$ est fausse. L'exemple suivant en apporte la preuve. Dans un ensemble ordonné $(E, \preceq)$, on considère la relation $P(x)$: « x *est minimal* » (i.e., $y \preceq x \implies y = x$) et $Q(x)$: « x *est maximal* » (i.e., $x \preceq y \implies y = x$). On vérifie facilement que, l'implication $ii)$ est vraie. Elle dit tout simplement que si tous les éléments de E sont minimaux, alors ils sont tous maximaux, ce que l'on peut vérifier par un raisonnement par l'absurde. En effet, si on suppose qu'il existe un x qui n'est pas maximal, alors il existe un y tel que $y \neq x$ et $x \preceq y$; mais un tel y ne peut pas exister puisqu'il ne serait pas minimal... Et il est par ailleurs clair que l'assertion $i)$ est en général fausse (un élément minimal n'est en général pas maximal).

Exercice 3 : 1. et 2. La table de vérité de $\|$ est donnée par la quatrième colonne du tableau ci-dessous qui montre également les équivalences logiques $(P \parallel P) \equiv \neg P$ (colonnes 5 et 6) et $((P \parallel Q) \parallel (P \parallel Q)) \equiv P \vee Q$ (colonnes 7 et 8).

P	Q	$P \vee Q$	$P \parallel Q$	$P \parallel P$	$\neg P$	$(P \parallel Q) \parallel (P \parallel Q)$	$P \vee Q$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F

On note que ces équivalences sont claires si on revient à la définition de $P \parallel Q$: $P \parallel P$ est vrai si, et seulement si, P et P sont faux (i.e. P est faux) et $(P \parallel Q) \parallel (P \parallel Q)$ est donc équivalent à $\neg(P \parallel Q)$, soit $\neg(\neg(P \vee Q))$ ou encore $P \vee Q$.

3. D'après les équivalences logiques de double négation $((\neg\neg P) \equiv P)$ et l'équivalence de de Morgan $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$, on obtient les équivalences logiques $((\neg P) \parallel (\neg Q)) \equiv \neg((\neg P) \vee (\neg Q)) \equiv (\neg\neg P) \wedge (\neg\neg Q) \equiv P \wedge Q$ dont on déduit

$$P \wedge Q \equiv ((P \parallel P) \parallel (Q \parallel Q))$$

en tenant compte de l'équivalence $(P \parallel P) \equiv \neg P$

De l'équivalence logique $(P \Longrightarrow Q) \equiv ((\neg P) \vee Q)$, on déduit $(P \Longrightarrow Q) \equiv ((P \parallel P) \vee Q)$ (par application de l'équivalence $(P \parallel P) \equiv \neg P$) et finalement

$$(P \Longrightarrow Q) \equiv ((P \parallel P) \parallel Q) \parallel ((P \parallel P) \parallel Q)$$

en appliquant l'équivalence $((P \parallel Q) \parallel (P \parallel Q)) \equiv P \vee Q$.

Exercice 4 : 1. Pour tout X de $\mathscr{P}(E)$, il est clair que $X\,\mathcal{R}_1\,(X \cap A)$ car $X \cap A = (X \cap A) \cap A$. Comme $X \cap A \in \mathscr{P}(A)$, ceci signifie que toute classe d'équivalence α admet un représentant dans $\mathscr{P}(A)$ et, en particulier, que $\mathscr{P}(A)$ contient une famille *minimale* de représentants de $E/\mathcal{R}_1$.

Par ailleurs, si $V, W \in \mathscr{P}(A)$, alors $cl(V) = cl(W)$ entraîne $V \cap A = W \cap A$, soit encore $V = W$ (car $V, W \subset A$). Ceci montre bien que la famille $\mathscr{P}(A)$ est une famille *minimale* de représentants de $E/\mathcal{R}_1$.

2. Pour tout X de $\mathscr{P}(E)$, il est clair que $X\,\mathcal{R}_2\,(X \setminus A)$ car l'égalité $X \cup A = (X \setminus A) \cup A$ découle de la définition de $X \setminus A$ (qui contient les éléments qui sont dans X et qui ne sont pas dans A). Ceci signifie que toute classe d'équivalence α admet un représentant dans $\mathscr{P}(E \setminus A)$.

Par ailleurs, si $V, W \in \mathscr{P}(E \setminus A)$, alors $cl(V) = cl(W)$ entraîne $V \cup A = W \cup A$, soit encore $V = W$(en effet, si x est dans V, alors x n'est pas dans A et x est dans $V \cup A = W \cup A$; mais, x n'étant pas dans A, $x \in W \cup A$ implique $x \in W$. Ceci montre $V \subset W$ et on démontre de la même manière l'inclusion réciproque $W \subset V$).

En conclusion, la famille $\mathscr{P}(E \setminus A)$ est bien une famille *minimale* de représentants de $E/\mathcal{R}_2$.

3.a. Nous supposons que X, Y, Z, W sont des parties de E telles que $X \setminus Y \subset W$ et $Y \setminus Z \subset W$ et on veut montrer que $X \setminus Z \subset W$. Soit $x \in X \setminus Z$, i.e. $x \in X$ mais $x \notin Z$. Soit $x \notin Y$, soit $x \in Y$. Si $x \notin Y$, alors $x \in X \setminus Y$ et $x \in W$ puisque $X \setminus Y \subset W$. Si $x \in Y$, alors $x \in Y \setminus Z$ (puisque $x \notin Z$) et $x \in W$ puisque $Y \setminus Z \subset W$. Dans tous les cas, $x \in W$ et on a donc montré que $X \setminus Z \subset W$.

3.b. Montrons que $\mathcal{R}_3$ est une relation d'équivalence. <u>Réflexivité :</u> Pour tout $X \subset E$, on a bien $X\,\mathcal{R}_3\,X$ car $X \Delta X = \emptyset \subset A$. <u>Symétrie :</u> Pour tous $X, Y \subset E$, $X\,\mathcal{R}_3\,Y \iff Y\,\mathcal{R}_3\,X$ car $X \Delta Y = Y \Delta X$. <u>Transitivité :</u> Soient $X, Y, Z \subset E$ tels que $X\,\mathcal{R}_3\,Y$ et $Y \mathcal{R}_3\,Z$, soit encore $X \Delta Y \subset A$ et $Y \Delta Z \subset A$. Cela s'écrit encore $\big((X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)\big) \subset A$ et $\big((Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)\big) \subset A$. En particulier, d'après 3.a., les inclusions $(X \setminus Y) \subset A$ et $(Y \setminus Z) \subset A$ entrainent $(X \setminus Z) \subset A$ et les inclusions $(Z \setminus Y) \subset A$ et $(Y \setminus X) \subset A$ entrainent $(Z \setminus X) \subset A$. Ainsi, on obtient l'inclusion $X \Delta Z = \big((X \setminus Z) \cup (Z \setminus X)\big) \subset A$ qui prouve que $\mathcal{R}_3$ est transitive.

3.c. Soient $X, Y \subset E$. Par définition, on a l'égalité $(*)$: $U \setminus V := U \cap \overline{V}$ et on obtient donc $X \Delta (X \setminus Y) = (X \setminus (X \setminus Y)) \cup ((X \setminus Y) \setminus X) \overset{(*)}{=} (X \cap \overline{X \setminus Y}) \cup \big((X \setminus Y) \cap \overline{X}\big) \overset{(*)}{=} (X \cap \overline{X \cap \overline{Y}}) \cup \big((X \cap \overline{Y}) \cap \overline{X}\big) = \big((X \cap (\overline{X} \cup Y)\big) \cup \big((X \cap \overline{X}) \cap \overline{Y}\big) = \big((X \cap \overline{X}) \cup (X \cap Y)\big) \cup \emptyset = \emptyset \cup (X \cap Y) = X \cap Y$

3.d. Pour toute partie X de E, on a $X\,\mathcal{R}_3\,(X \setminus A)$ car $X \Delta (X \setminus A) \overset{3.c}{=} X \cap A \subset A$ et cela montre que $\mathscr{P}(E \setminus A)$ contient une famille minimale de représentants de $E/\mathcal{R}_3$.

Soient à présent $X, Y \in \mathscr{P}(E \setminus A)$ tels que $X \mathcal{R}_3 Y$. On a alors $X \Delta Y \subset A$, soit $\big((X \cup Y) \setminus (X \cap Y)\big) \subset A$. Comme $X \subset (E \setminus A)$ et $Y \subset (E \setminus A)$, on a aussi $(X \cup Y) \subset (E \setminus A)$. Par conséquent, $\big((X \cup Y) \setminus (X \cap Y)\big) \subset A$ n'est possible que si $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = \emptyset$, c'est-à-dire, si $X \cap Y = X \cup Y$, soit encore $X = Y$. Et on a ainsi montré que $\mathscr{P}(E \setminus A)$ est une famille minimale de représentants de $E/\mathcal{R}_3$.

Exercice 5 : 1. <u>Réflexivité :</u> pour tout f de E, $f \preceq f$ est vrai puisqu'on a bien $f(x) \leq f(x)$ pour tout réel x. <u>Antisymétrie :</u> Soient f et g dans E telles que $f \preceq g$ et $g \preceq f$. Pour tout réel x, on a alors $f(x) \leq g(x)$ et $g(x) \leq f(x)$, soit encore $f(x) = g(x)$; et on a montré que $f = g$. <u>Transitivité :</u> Soient f, g et h dans E telles que $f \preceq g$ et $g \preceq h$. Pour tout réel x, on a alors $f(x) \leq g(x)$ et $g(x) \leq h(x)$. Il s'ensuit que $f(x) \leq h(x)$ pour tout réel x et donc que $f \preceq h$. On a ainsi montré que $\preceq$ est une relation d'ordre sur E.

Ce n'est pas une relation d'ordre total car, par exemple, les fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ ne sont pas comparables pour $\preceq$ (i.e. on n'a ni $f \preceq g$, ni $g \preceq f$).

2. Si « `f est majorée` », alors « `{f} est strictement majoré` ». En effet, l'assertion « `f est majorée` » signifie qu'il existe un réel M tel que, pour tout réel x, $f(x) \leq M$. Cela implique notamment que $f \preceq C_M$ (où $C_M \in E$ est la fonction constante qui envoie tout réel sur M), i.e. que $\{f\}$ est majoré (dans $(E, \preceq)$) et que $\{f\}$ est également strictement majoré (au besoin en majorant par $C_{M'}$ pour un $M' > M$).

La réciproque est fausse. On peut avoir $\{f\}$ majoré sans que f soit une fonction majorée. De fait, quelle que soit la fonction f prise dans E, $\{f\}$ est strictement majoré (par exemple, $f \preceq g$ avec g définie par $g(x) = f(x) + 1$ pour tout réel x). Or toute fonction f n'est pas majorée (par exemple $f(x) = x$).

3. Du fait que $(f_i)_{i \in I}$ est une famille majorée de fonctions de E, on déduit en particulier que, pour tout réel x, $\{f_i(x),\ i \in I\}$ est un sous-ensemble majoré et non vide de $\mathbb{R}$. D'après la propriété de la borne supérieure (qu'on sait être vraie dans $\mathbb{R}$), pour chaque réel x, $\{f_i(x),\ i \in I\}$ a donc une borne sup $m(x)$. On a ainsi une fonction $m \in E$ dont on va vérifier qu'elle est la borne supérieure de la famille $(f_i)_{i \in I}$. D'une part, m est un majorant de la famille $(f_i)_{i \in I}$ puisque pour tout i de I et pour tout x réel, on a $f_i(x) \leq m(x)$, soit encore, pour tout i de I, $f_i \preceq m$. Ensuite, si g est un majorant de la famille $(f_i)_{i \in I}$, on a $f_i(x) \leq g(x)$ pour tout i de I et pour tout x réel. Pour x fixé, les inégalités $f_i(x) \leq g(x)$ pour tout i de I entrainent $m(x) \leq g(x)$ (car $m(x) = \sup\{f_i(x),\ i \in I\}$) ; par conséquent, on obtient bien que $m \preceq g$ et on conclut que m est la borne supérieure de la famille $(f_i)_{i \in I}$.