

Indépendance et convergences

1 Indépendance

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité.

Définition 1. (Indépendance d'événements)

- Deux événements $A, B \in \mathcal{A}$ sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Des événements $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ sont indépendants si $\forall \{j_1, \dots, j_p\} \subset \{1, \dots, n\}$ on a

$$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_p}) = P(A_{j_1}) \times \dots \times P(A_{j_p}).$$

Définition 2. (Indépendance de sous-tribus)

- Des sous-tribus $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ de \mathcal{A} sont mutuellement indépendantes si

$$\forall C_i \in \mathcal{B}_i, \quad P(C_1 \cap \dots \cap C_n) = P(C_1) \times \dots \times P(C_n).$$

- Des sous-tribus de \mathcal{A} , $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes si toute sous-famille finie l'est.

L'indépendance de tribus se vérifie sur des parties génératrices stables par intersection :

Proposition 3. Soient $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ des sous-tribus de \mathcal{A} . Pour chaque i soit $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{B}_i$ avec

- $\Omega \in \mathcal{F}_i$, $\sigma(\mathcal{F}_i) = \mathcal{B}_i$
- \mathcal{F}_i stable par intersection finie.

Si $\forall F_i \in \mathcal{F}_i$ on a $P(F_1 \cap \dots \cap F_n) = \prod_{i=1}^n P(F_i)$ alors les $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^n$ sont indépendantes.

Proposition 4. (Regroupement par paquets) Soit $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-tribus de \mathcal{A} , indépendantes. Soit une partition de I , $I = \cup_{j \in J} I_j$ et pour $j \in J$, $\tilde{\mathcal{B}}_j = \sigma(\mathcal{B}_i, i \in I_j)$. Alors les tribus $(\tilde{\mathcal{B}}_j)_{j \in J}$ sont indépendantes.

Définition 5. (Indépendance de variables aléatoires)

Pour $i \in I$, soit $X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (E_i, \mathcal{E}_i)$ une v.a.. Les $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes si les tribus $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ le sont. En particulier X_1, \dots, X_n sont indépendants si et seulement si $\forall F_i \in \mathcal{E}_i$,

$$P\left((X_1 \in F_1) \cap \dots \cap (X_n \in F_n)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in F_i).$$

Théorème 6. Des v.a. X_1, \dots, X_n sont indépendants si et seulement si

$$P_{(X_1, \dots, X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}.$$

Dans ce cas :

- $\forall f_i$ mesurables positives : $E\left(\prod_{i=1}^n f_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^n E f_i(X_i)$.

- Si f_i mesurable de signe quelconque, l'égalité précédente est vérifiée si

$$E\left(\prod_{i=1}^n |f_i(X_i)|\right) = \prod_{i=1}^n E|f_i(X_i)| < \infty.$$

Proposition 7. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- X_1, \dots, X_n sont indépendantes.
- $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \Phi_{(X_1, \dots, X_n)}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{i=1}^n \Phi_{X_i}(\xi_i).$
- $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, P(X_1 \leq a_1, \dots, X_n \leq a_n) = \prod_{j=1}^n P(X_j \leq a_j).$
- $\forall f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, E\left(\prod_{i=1}^n f_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^n E f_i(X_i).$

2 Sommes de variables aléatoire indépendantes

Définition 8. Des v.a.r. $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont non corrélées si

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = 0$$

Remarque 9. Des variables indépendantes sont non corrélées.

Proposition 10. Soit X_1, \dots, X_n des v.a.r. dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes (non corrélées deux à deux suffit), alors

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i).$$

Loi de la somme de v.a. indépendantes :

Définition 11. Soient μ, ν deux probabilités sur \mathbb{R}^d . Leur produit de convolution $\mu * \nu$ est défini comme la mesure image de $\mu * \nu$ par $(y, z) \mapsto y + z$. En d'autres termes

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu * \nu(A) = \mu \otimes \nu\left(\{(y, z), y + z \in A\}\right)$$

$$\forall \varphi \geq 0, \int \varphi(x) d(\mu * \nu)(x) = \int \int \varphi(y + z) d\mu(y) d\nu(z)$$

Exemple 12. Si $d\mu(x) = p(x) dx$ et $d\nu(y) = q(y) dy$ alors $\mu * \nu$ admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction $p * q(x) = \int p(x - z) q(z) dz$.

Proposition 13. Soient X, Y des v.a. indépendantes à valeurs \mathbb{R}^d alors

$$\begin{aligned} P_{X+Y} &= P_X * P_Y, \\ \Phi_{X+Y} &= \Phi_X \Phi_Y, \\ L_{X+Y} &= L_X L_Y. \end{aligned}$$

Si X, Y sont à valeurs dans \mathbb{N} , alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Exemple 14. (Lois classiques dont les convolées sont très simples)

- Lois binomiales : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in (0, 1)$,

$$\mathcal{B}(n, p) := \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

On a $\mathcal{B}(n, p) * \mathcal{B}(n', p') = \mathcal{B}(n + n', p)$. En d'autres termes, si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n', p')$ sont indépendantes alors :

$$X + Y \sim \mathcal{B}(n + n', p).$$

On appelle loi de Bernoulli avec probabilité de succès $p \in [0, 1]$, la loi

$$b(p) := \mathcal{B}(1, p) = (1-p)\delta_0 + p\delta_1.$$

- Lois binomiales négatives : $\mathcal{B}(-m, p)$ avec $p \in (0, 1)$ et $m \in \mathbb{N}^*$, définies par

$$\mathcal{B}(-m, p) := \sum_{k \geq 0} C_{m+k-1}^{m-1} p^m (1-p)^k \delta_k.$$

Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{B}(-m, p) * \mathcal{B}(-n, p) = \mathcal{B}(-(m+n), p)$. On appelle loi géométrique $\mathcal{G}(p) := \mathcal{B}(-1, p) = \sum_{k \geq 0} p(1-p)^k \delta_k$.

- Loi de Poisson : $\mathcal{P}(\lambda) := \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$ avec $\lambda > 0$. Elle vérifie

$$\mathcal{P}(\lambda) * \mathcal{P}(\lambda') = \mathcal{P}(\lambda + \lambda').$$

- Lois $\gamma(t, a)$ avec $t > 0$ et $a > 0$ de densité $\frac{a^t}{\Gamma(t)} x^{t-1} e^{-ax} 1_{x>0}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . On rappelle que pour $t > 0$, $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$. Si $s, t > 0$,

$$\gamma(t, a) * \gamma(s, a) = \gamma(t + s, a).$$

On appelle loi exponentielle de paramètre $a > 0$ la mesure de probabilité $\mathcal{Exp}(a) := \gamma(1, a)$.

- Lois gaussiennes : $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$. Elles sont définies par $\mathcal{N}(m, 0) := \delta_m$ et pour $\sigma > 0$

$$\mathcal{N}(m, \sigma^2)(dx) := e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On a $\mathcal{N}(m, \sigma^2) * \mathcal{N}(m', \sigma'^2) = \mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2)$.

3 Suites de tribus ou de v.a. indépendantes

Théorème 15 (loi du 0-1). Soit $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-tribus indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On pose $\mathcal{B}_k := \sigma(\mathcal{T}_n, n \geq k)$ et l'on définit la tribu asymptotique ou terminale $\mathcal{B}_\infty := \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{B}_k$. Alors $\forall B \in \mathcal{B}_\infty$, $P(B) \in \{0, 1\}$.

Définition 16. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de (Ω, \mathcal{A}) ,

$$\begin{aligned} \limsup_n A_n &:= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right) = \{\omega \in \Omega; \text{ pour une infinité de valeurs de } n, \omega \in A_n\}, \\ \liminf_n A_n &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right) = \{\omega \in \Omega; \exists n_0, \forall n \geq n_0, \omega \in A_n\}. \end{aligned}$$

Exemple 17. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants de (Ω, \mathcal{A}, P) . Les tribus $\mathcal{T}_n = \{\emptyset, A_n, A_n^c, \Omega\}$ sont indépendantes. Donc

$$\begin{aligned} P(\liminf A_n) &\in \{0, 1\}. \\ P(\limsup A_n) &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Lemme 18 (Borel-Cantelli). Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $A_i \in \mathcal{A}$.

- i. Si $\sum_{n \geq 0} P(A_n) < \infty$ alors $P(\limsup A_n) = 0$ i.e. p.s. $\text{card } \{n, \omega \in A_n\} < \infty$.
- ii. Si les A_n sont indépendants et si $\sum P(A_n) = +\infty$ alors $P(\limsup A_n) = 1$ i.e. p.s. A_n a lieu une infinité de fois.

4 Convergence

4.1 Convergence presque sure

Définition 19. Soient $X, (X_n)_{n \geq 0}$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ tend vers X *presque sûrement* et on note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega; X(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)\right\}\right) = 1.$$

La suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{\omega, \sup_{k \geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 0$.

Proposition 20. (Critère de Borel-Cantelli).

- i. Si $\forall \varepsilon > 0, \sum_{n \in \mathbb{N}} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$ alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.
- ii. Si les X_n sont indépendantes et α est un nombre réel fixé,

$$X_n \xrightarrow{p.s.} \alpha \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \sum_{n \in \mathbb{N}} P(|X_n - \alpha| \geq \varepsilon) < \infty.$$

Proposition 21. Soient $(X_n)_{n \geq 0}, (Y_n)_{n \geq 0}, X, Y$ des v.a.r. définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) . Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow{p.s.} X + Y$ et $X_n Y_n \xrightarrow{p.s.} XY$.

4.2 Convergence en probabilité

Définition 22. Soient $X, (X_n)_{n \geq 0}$ des variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ tend vers X *en probabilité* et on note $X_n \xrightarrow{P} X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Corollaire 23. Soient (X_n) et (Y_n) deux suites de v.a.r. sur (Ω, \mathcal{A}, P) telles que $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$.

- Si ϕ est continue alors $\phi(X_n) \xrightarrow{P} \phi(X)$,
- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{P} \alpha X + \beta Y$,
- $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$.

5 Convergence dans $L^p, p \geq 1$

Définition 24. Soient X et $(X_n)_{n \geq 0}$ des v.a.r. dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que la suite (X_n) tend vers X au sens L^p et on note $X_n \xrightarrow{L^p} X$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X - X_n\|_p = 0$, c'est-à-dire si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^p) = 0.$$

Proposition 25. Si $q \geq p \geq 1$,

$$X_n \xrightarrow{L^q} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X.$$

5.1 Convergence en loi

On note $C_b(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues bornées de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} et $C_0(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Proposition 26. Soient μ et ν deux mesures de probabilité boréliennes sur \mathbb{R}^d . Alors $\mu = \nu$ si et seulement si

$$\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d), \quad \int \varphi d\mu = \int \varphi d\nu.$$

Définition 27. Soient μ et $(\mu_n)_{n \geq 0}$ des mesures finies sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. On dit que la suite de mesures $(\mu_n)_{n \geq 0}$ converge *étroitement* vers μ et on note $\mu_n \xrightarrow{\text{étroit}} \mu$ si

$$\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_n = \int \varphi d\mu.$$

Proposition 28. Soit H un sous-ensemble dense de $(C_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$. Soient μ et $(\mu_n)_{n \geq 0}$ des mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Alors

$$\mu_n \xrightarrow{\text{étroit}} \mu \Leftrightarrow \forall \varphi \in H, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_n = \int \varphi d\mu.$$

Définition 29. Soient X et $(X_n)_{n \geq 0}$ v.a. à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, mais pas forcément définies sur le même espace de probabilité. On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge *en loi* vers X et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si $P_{X_n} \xrightarrow{\text{étroit}} P_X$, c'est-à-dire si

$$\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E\varphi(X_n) = E\varphi(X).$$

On note aussi parfois $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P_X$.

Proposition 30. $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$.

Proposition 31. Soient μ_n, μ des mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i. $\mu_n \xrightarrow{\text{étroit}} \mu$.
- ii. Pour tout t tel que F_μ soit continue, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mu_n}(t) = F(t)$. (fonction de répartition)
- iii. Pour tout t , $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{\mu_n}(t) = \Phi(t)$. (fonction caractéristique)

5.2 Loi des grands nombres

Définition 32. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. définies sur un même espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) . A un échantillon de taille n , $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$, on associe

- la *moyenne empirique* $\bar{X}_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega)$,
- la *mesure empirique* $\mu_n^\omega := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i(\omega)}$.

Théorème 33 (Loi forte des grands nombres). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r indépendantes et de même loi. Il ya équivalence entre

- i. $E|X_1| < +\infty$,
- ii. $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.}$ existe.

Dans ce cas la limite est $\mathbb{E}(X_1)$.

5.3 Théorème de la limite centrale

Théorème 34. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi avec $E(X_1^2) < \infty$. Soit $m = EX_1$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$, alors

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - EX_1}{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - nEX_1}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. à valeur dans \mathbb{R}^d , indépendantes et de même loi. On suppose que $E(|X_1|^2) < \infty$ et on pose $\Gamma = \text{Cov}(X_1)$. Dans ce cas

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nEX_1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0, \Gamma).$$

Corollaire 35. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi avec $E(X_1^2) < \infty$. On note $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$. Alors pour tout $a \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(|\bar{X}_n - EX_1| \geq \frac{\sigma a}{\sqrt{n}} \right) = 2 \int_a^{+\infty} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}.$$