

Feuille n° 7 - Espaces L^p

Exercice 1. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

a) Soient $p, q \in [1, \infty]$ deux exposants conjugués. Si $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(X)$ et $g_n \rightarrow g$ dans $L^q(X)$, montrer que $f_n g_n \rightarrow f g$ dans $L^1(X)$.

b) Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, où $r \geq 1$. Si $f \in L^p(X)$ et $g \in L^q(X)$, montrer que $f g \in L^r(X)$ et

$$\|f g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

En déduire un résultat analogue à celui de la question précédente.

Exercice 2. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. On suppose que $\mu(X) < \infty$.

On considère p_1, p_2 tels que $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$. Montrer que $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$.

Si $I : L^{p_2}(X) \rightarrow L^{p_1}(X)$, $I(f) = f$ est l'inclusion canonique, montrer que I est une application linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 3. On considère l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$, où \mathcal{M} est la σ -algèbre des ensembles Lebesgue mesurables et λ est la mesure de Lebesgue. Soient $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, $p_1 < p_2$. Montrer que $L^{p_1}(\mathbb{R}) \not\subset L^{p_2}(\mathbb{R})$ et que $L^{p_2}(\mathbb{R}) \not\subset L^{p_1}(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Soit $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage. On note pour $p \in [1, \infty]$, l'espace

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

i) Vérifier que $\ell^p(\mathbb{N}) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

ii) Montrer que $\ell^p(\mathbb{N}) = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \|a\|_p < \infty\}$ où $\|a\|_p = (\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^p)^{1/p}$ si $p < \infty$ et $\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

iii) Montrer qu'on a les inclusions suivantes:

$$\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$$

pour $1 < p < q < \infty$.

Exercice 5. (Théorème de convergence dominée dans L^p) Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables sur X telle que

i) Il existe une fonction mesurable f telle que $f_n \rightarrow f$ μ -p.p. sur X ,

ii) Il existe $p \in [1, \infty[$ et $g \in L^p(X)$ telle que $\forall n, |f_n| \leq g$ μ -p.p. sur X .

Alors $f_n, f \in L^p(X)$ et $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(X)$.

Exercice 6. Donner un exemple d'espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) et de suite $(f_n)_{n \geq 1} \subset L^p(X)$ telle que $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(X)$, mais $f_n \not\rightarrow f$ μ -p.p.

Exercice 7. Soit $1 < p \leq \infty$ et soit q l'exposant conjugué de p . Soit $f \in L^p([0, \infty[)$ (où $]0, \infty[$ est muni de la mesure de Lebesgue). On définit $F(x) = \int_{[0, x]} f(t) d\lambda(t)$.

a) Montrer que $|F(x_1) - F(x_2)| \leq \|f\|_p \cdot |x_1 - x_2|^{\frac{1}{q}}$.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{\frac{1}{q}}} = 0$.

c) Montrer que la valeur $\frac{1}{q}$ est optimale dans la question précédente: pour tout $\alpha > \frac{1}{q}$, il existe $f \in L^p([0, \infty[)$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^\alpha} = \infty$.
(Ind.: chercher f de la forme $f(x) = \mathbf{1}_{[0, 1]}(x)x^r$, pour $r \in \mathbb{R}$ bien choisi.)

Exercice 8. (Inégalité de Hardy) On considère l'espace $]0, \infty[$ muni de la mesure de Lebesgue. Soit $1 < p < \infty$ et soit $f \in L^p(]0, \infty[)$. On définit $F :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_{]0, x]} f(t) d\lambda(t).$$

a) On suppose d'abord que $f \in C_c^0(]0, \infty[)$ et $f \geq 0$. Montrer l'inégalité de Hardy:

$$(*) \quad \|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p.$$

b) Montrer que l'inégalité de Hardy (*) est vraie si l'on suppose uniquement $f \in L^p(]0, \infty[)$.

c) Montrer que l'égalité a lieu dans (*) si et seulement si $f = 0$ p.p.

d) Montrer que la constante $\frac{p}{p-1}$ dans (*) est optimale.

e) Montrer que si $f \in L^1(]0, \infty[)$ et $f \geq 0$, alors $F \notin L^1(]0, \infty[)$.

Ind.: a) Intégrer par parties afin d'obtenir $\int_0^\infty F^p(x) dx = -p \int_0^\infty x F^{p-1}(x) F'(x) dx$. Remarquer

que $x F' = f - F$, puis appliquer l'inégalité de Hölder à $\int_0^\infty F^{p-1} f dx$.

b) Utiliser la densité de C_c^0 dans L^p .

d) Prendre $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ si $x \in [1, A]$ et $f(x) = 0$ sinon, où A est suffisamment grand.

Exercice 9. Soit $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^∞ à support compact telle que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho dx = 1$. Si $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable Lebesgue telle que f est intégrable sur tout compact de \mathbb{R}^N , montrer que le produit de convolution $f * \rho$ est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}^N . Si de plus, f est à support compact, montrer que $f * \rho$ est à support compact.