

Feuille n° 6

Exercice 1. On considère les espaces mesurés (X, \mathcal{A}, μ) et $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$, où

$$\begin{aligned} X &= [0, 1], & \mathcal{A} &= \mathcal{P}(X), & \mu(A) &= \text{card}(A) \text{ est la mesure de comptage,} \\ Y &= [0, 1], & \mathcal{B} & \text{est la } \sigma\text{-algèbre de Borel sur } [0, 1], & \lambda & \text{est la mesure de Lebesgue.} \end{aligned}$$

On note $I_j^n = [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$ et $Q_n = (I_1^n \times I_1^n) \cup (I_2^n \times I_2^n) \cup \dots \cup (I_n^n \times I_n^n)$.

a) Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble Q_n est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -mesurable.

b) En déduire que $D = \{(t, t) \mid t \in [0, 1]\}$ est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -mesurable.

c) On note $f = \mathbf{1}_D$. Remarquer que f est une fonction $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -mesurable et positive. Calculer $\int_X f(x, y) d\mu(x)$ et $\int_Y f(x, y) d\lambda(y)$, puis

$$\int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\lambda(y) \quad \text{et} \quad \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\lambda(y) \right) d\mu(x).$$

Quelle conclusion peut-on tirer ?

Exercice 2. Soit $(\delta_n)_{n \geq 1} \subset [0, 1]$ une suite strictement croissante telle que $\delta_n \rightarrow 1$. Pour chaque n on choisit une fonction continue et positive g_n telle que $g_n = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus]\delta_n, \delta_{n+1}[$ et $\int_0^1 g_n(t) dt = 1$. On définit

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y).$$

a) Montrer que f est correctement définie sur $[0, 1] \times [0, 1]$ et continue sur $[0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(1, 1)\}$.

b) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Montrer que f est $\mathcal{B}([0, 1]^2)$ -mesurable. Calculer

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x, y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \quad \text{et} \quad \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x, y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$

c) Montrer que $\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} |f(x, y)| d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \infty$. La fonction f est-elle $\lambda \otimes \lambda$ -intégrable? Le théorème de Fubini est-il mis en défaut?

Exercice 3. On considère $\Omega =]-1, 1[\times]-1, 1[$ et la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Montrer que f est borélienne et calculer

$$I_1 = \int_{]-1,1[} \left(\int_{]-1,1[} f(x, y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{]-1,1[} \left(\int_{]-1,1[} f(x, y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$

b) La fonction f est-elle $\lambda \otimes \lambda$ -intégrable sur Ω ?

Exercice 4. Calculer les intégrales

$$J_1 = \int_{]0,1[} \left(\int_{]0,1[} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \quad \text{et} \quad J_2 = \int_{]0,1[} \left(\int_{]0,1[} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} d\lambda(y) \right) d\lambda(x),$$

puis $J_3 = \int_{]0,1[^2} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y).$

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2).$

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq n\pi\}$. Calculer $J_n = \int_{D_n} |f| d(\lambda \otimes \lambda).$

b) La fonction f est-elle $\lambda \otimes \lambda$ -intégrable sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 6. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble Borel mesurable et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Borel mesurable. Le graphe de f est l'ensemble

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_N, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid x_{N+1} = f(x_1, \dots, x_N)\}.$$

Montrer que $G_f \subset \mathbb{R}^{N+1}$ est Borel mesurable et que sa mesure de Lebesgue est nulle.

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier l'intégrabilité (au sens de Lebesgue) des fonctions suivantes:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{(1 + x + y)^\alpha} \text{ sur }]0, \infty[^2 & g(x, y) &= \frac{1}{(x + y)^\alpha} \text{ sur }]0, 1[^2 \\ h(x, y) &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} \text{ sur }]0, 1[^2 & k(x, y) &= \frac{\sin(x - y)}{x^2 + y^2} \text{ sur }]0, 1[^2 \\ \varphi(x, y, z) &= \frac{1}{x + y^2 + z^3} \text{ sur }]0, 1[^3 & h(x, y, z) &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} \text{ sur }]0, 1[^3. \end{aligned}$$

Exercice 8. Soit $D =]0, \infty[^2$. Calculer l'intégrale de Gauss $J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$

(Ind.: Montrer que $J^2 = \int_D e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)$ et passer en coordonnées polaires.)