

Feuille n° 5

Exercice 1. Soit f une fonction intégrable positive définie sur un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) . Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $E_n = \{x \in X \mid f(x) \geq n\}$ et $F_n = E_n \setminus E_{n+1}$.

a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) d\mu(x) = 0$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{F_n} f(x) d\mu(x) < \infty$.

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mu(E_n) = 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$.

Exercice 2. Dans la suite λ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . A l'aide des théorèmes de convergence du cours, déterminer:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(n+x)^n} d\lambda(x)$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n^2}\right)^n x^p d\lambda(x)$, où $p > 0$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{nx} e^{-\frac{x}{n}} d\lambda(x)$ (noter que ue^{-u} est bornée sur \mathbb{R}_+);

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right) d\lambda(x)$.

Exercice 3. Soit $1 \leq p < \infty$, (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions t.q. $|f_n|^p$ intégrables et la suite $(f_n)_n$ converge μ -p.p. vers une fonction f qui a la propriété que $|f|^p$ est intégrable. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n|^p d\mu = \int_X |f|^p d\mu$, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0$.

Exercice 4. * (hors programme) Montrer qu'il existe une fonction bornée et Lebesgue mesurable $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_{[0,1]} |f - g| d\lambda > 0$ pour toute fonction Riemann intégrable $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
[Ind.: Considérer une fonction caractéristique d'un ensemble de type Cantor.]

Exercice 5. Soit F la fonction définie sur une partie de \mathbb{R} par

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{ax} - 1}{x\sqrt{x}} dx.$$

Déterminer les valeurs de a en lesquelles F est définie, continue, respectivement dérivable. Calculer F' lorsqu'elle existe et en déduire une autre expression de F .

Exercice 6. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles f est bien définie. À l'aide du Théorème de dérivation des intégrales avec paramètre, exprimer $f'(x)$. En déduire l'identité $f(x) = -\int_x^{\infty} \frac{1}{1-e^t} dt$, $\forall x > 0$.

Exercice 7. (fonction Γ d'Euler) On considère la fonction

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

- a) Montrer que Γ est une fonction bien définie et continue sur $]0, \infty[$.
- b) Montrer que Γ est dérivable et calculer Γ' .
- c) Montrer que Γ est C^∞ . Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\Gamma^{(k)}(z)$.
- d) Montrer que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ pour tout $z \in]0, \infty[$. Calculer $\Gamma(1)$, ensuite $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.