

Feuille n° 4

Exercice 1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 . On se propose de démontrer que

$$\int_{[0,1]} f'(x) dx = f(1) - f(0),$$

où à gauche on a une intégrale de Lebesgue, qui peut-être comprise comme $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) f'(x) dx$. On introduit pour cela la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f'(k/n) \mathbf{1}_{I_{k,n}}(x), \quad I_{k,n} = [k/n, (k+1)/n[,$$

et la suite de réels $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$

$$\varepsilon_n = \max_{0 \leq k \leq n-1} \sup_{I_{k,n}} |f'(x) - f'(k/n)|.$$

- a) Montrer que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.
- b) Démontrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$|f((k+1)/n) - f(k/n) - f'(k/n)/n| \leq \varepsilon_n/n.$$

- c) En déduire que

$$\left| \int_{[0,1]} f'(x) dx - (f(1) - f(0)) \right| \leq 2\varepsilon_n$$

et conclure.

Exercice 2. Soient f, g fonctions mesurables positives sur un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) . On rappelle que $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, $\nu(A) = \int \mathbf{1}_A f d\mu$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) . Montrer que $\int_X g d\nu = \int_X fg d\mu$.

Exercice 3. On note μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$.

- a) On suppose que $a_n \geq 0$ pour tout n . Montrer que $f_n = f \cdot \mathbf{1}_{\{1, \dots, n\}}$ est une fonction étagée positive et calculer $\int_{\mathbb{N}^*} f_n d\mu$.

- b) Si $a_n \geq 0$ pour tout n , montrer que $\int_{\mathbb{N}^*} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (*Ind.: th. de convergence monotone*).

c) On suppose que les a_n sont de signe quelconque. Montrer que f est μ -intégrable si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ est absolument convergente. Si tel est le cas, montrer que

$$\int_{\mathbb{N}^*} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Exercice 4. a) Montrer qu'une fonction Lebesgue-mesurable $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est Lebesgue intégrable si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,n]} |f| d\lambda$ existe et est finie.

b) Montrer qu'une fonction Lebesgue-mesurable $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est Lebesgue intégrable si et seulement si $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{[0,x]} |f| d\lambda$ existe et est finie.

- c) Formuler un critère analogue pour une fonction $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 5. Montrer qu'il existe une fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f est continue sur $]0, 1]$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 f d\lambda$ existe et est finie, mais f n'est pas Lebesgue intégrable sur $[0, 1]$.

Exercice 6. Soit $(f_n : X \rightarrow [0, \infty])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) . Supposons qu'il existe une fonction intégrable $g : X \rightarrow [0, \infty]$ telle que $f_n \leq g$ μ -p.p. dans X pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\int_X \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 7. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par:

$$f_n(x) = n^2 x \mathbf{1}_{[0, 1/n]} + (2n - n^2 x) \mathbf{1}_{]1/n, 2/n]}.$$

Montrer que les f_n sont Lebesgue mesurables et calculer

$$\liminf \int_{[0,1]} f_n d\lambda, \quad \limsup \int_{[0,1]} f_n d\lambda, \quad \int_{[0,1]} \liminf f_n d\lambda, \quad \int_{[0,1]} \limsup f_n d\lambda.$$

Exercice 8. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions positives intégrables qui convergent presque partout vers f , une fonction intégrable. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

Exercice 9. Soient p et q sont deux réels positifs. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}.$$

En déduire une expression de $\ln(2)$ et de $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $f_n : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

a) Montrer que la série de terme général $f_n(x)$ est convergente pour tout $x > 0$.

Calculer la somme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

b) Montrer que les fonctions f_n et f sont intégrables sur $[0, \infty[$.

c) Calculer et comparer $\int_0^{\infty} f(x) dx$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx$.

d) Expliquer.