
Feuille n° 3- Fonctions mesurables.

Exercice 1. Soient X et Y deux ensembles, $f : X \rightarrow Y$ une fonction et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une tribu de X . On pose

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Montrer que \mathcal{B} est une tribu de Y et que $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ est mesurable. De plus, \mathcal{B} est la plus grande tribu de Y telle que f soit mesurable.

Exercice 2. a) Soit $O \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Montrer qu'il existe une suite de rectangles ouverts $(]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[)_{n \geq 1}$ telle que $O = \bigcup_{n \geq 1}]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[$.

b*) Montrer que $\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

c) Montrer que la fonction $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ est borélienne.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est Borel mesurable.

Exercice 4. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et soit $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On suppose que l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) \geq r\}$ est mesurable pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Montrer que f est une fonction mesurable.

Exercice 5. a) On considère un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) avec mesure complète. Soit $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable et soit $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction telle que $f = g$ presque partout. Montrer que g est mesurable.

b) Montrer que le résultat de la question précédente est faux dans un espace avec mesure incomplète.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue λ , c'est-à-dire, l'ensemble S de discontinuités de f est Lebesgue mesurable de mesure $\lambda(S) = 0$. Montrer que f est mesurable.

Exercice 7. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et soit $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ($n \geq 1$) une suite de fonctions mesurables. On note $A = \{x \in X \mid (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ converge}\}$. Montrer que

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N}^*, \forall p \geq k, \forall q \geq k, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{n}\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{p=k}^{\infty} \bigcap_{q=k}^{\infty} \left\{x \in X \mid |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{n}\right\}. \end{aligned}$$

En déduire que A est mesurable.

Exercice 8. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable. Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{L}(\mathbb{R})$) la tribu des boreliens (resp. des ensembles Lebesgue mesurables) de \mathbb{R} .

a) Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ -mesurable, montrer que f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable.

b)* Construire un exemple de fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable, mais f n'est pas $(\mathcal{A}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ -mesurable.