

---

## Feuille n° 2 - Classes monotones. Mesures.

---

### Exercice 1.

a) Soit  $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$  une famille de classes monotones d'un ensemble  $X$ . Montrer que  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$  est une classe monotone.

b) Soit  $\mathcal{E}$  une famille non-vidée de parties d'un ensemble  $X$ . On note  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$  l'intersection de toutes les classes monotones contenant la famille  $\mathcal{E}$ . Montrer que

i)  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$  est une classe monotone.

ii) Si  $\mathcal{M}$  est une classe monotone contenant  $\mathcal{E}$ , alors  $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}$ .

iii)  $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$  (où  $\sigma(\mathcal{E})$  est la tribu engendrée par  $\mathcal{E}$ ).

On appelle  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$  la classe monotone engendrée par  $\mathcal{E}$ . C'est la "plus petite" classe monotone contenant  $\mathcal{E}$ .

### Exercice 2.

a) Montrer que toute tribu est aussi une classe monotone.

b) Donner un exemple d'algèbre qui n'est pas classe monotone.

c) Donner un exemple de classe monotone qui n'est pas algèbre.

**Exercice 3.** Soit  $X$  un ensemble non-vidé et soit  $a \in X$ . On définit  $\delta_a : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$  par  $\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A, \\ 0 & \text{si } a \notin A. \end{cases}$  Montrer que  $\delta_a$  est une mesure sur la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{P}(X)$  (qu'on appelle mesure de Dirac concentrée en  $a$ ).

**Exercice 4.** Soit  $X$  un ensemble et soit  $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$  par  $\mu(A) = \begin{cases} \text{card}(A) & \text{si } A \text{ est fini,} \\ \infty & \text{si } A \text{ est infini.} \end{cases}$  Montrer que  $\mu$  est une mesure sur  $\mathcal{P}(X)$  (qu'on appelle la mesure de comptage).

**Exercice 5.** Soit  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$  et soit  $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$  définie par  $\mu(A) = \begin{cases} \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{si } A \text{ est fini,} \\ \infty & \text{si } A \text{ est infini.} \end{cases}$

Montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux parties disjointes de  $\mathbb{N}^*$  alors on a  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ , mais  $\mu$  n'est pas une mesure sur  $\mathcal{A}$ .

**Exercice 6.** Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace mesurable et soit  $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$  une application telle que  $\mu(\emptyset) = 0$  et pour tous les ensembles disjoints  $A, B \in \mathcal{A}$  on a  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

Montrer que  $\mu$  est une mesure si et seulement si quelque soit une suite  $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$  telle que  $A_n \subset A_{n+1}$  pour tout  $n$ , on a  $\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ .

**Exercice 7.** (exemple d'ensemble non-mesurable Lebesgue) On dit que deux nombres réels  $x, y$  sont "équivalents" et on note  $x \equiv y$  si  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Montrer que " $\equiv$ " est une relation d'équivalence sur  $[0, 1]$ . On note par  $C_x$  la classe d'équivalence de  $x$ , c'est-à-dire  $C_x = \{y \in [0, 1] \mid x - y \in \mathbb{Q}\}$  et par  $I$  l'ensemble des classes d'équivalence, c'est-à-dire  $I = \{C_x \mid x \in [0, 1]\}$ . Par l'axiome du choix, il est possible de choisir un élément de chaque classe d'équivalence  $C$  qu'on note  $a_C$  et on pose  $A = \{a_C \mid C \in I\}$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , soit  $A_t = \{x + t \mid x \in A\}$  ( $A_t$  est une translatée de l'ensemble  $A$ ). Montrer que

$$[0, 1] \subset \bigcup_{t \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} A_t \subset [-1, 2].$$

En déduire que  $A$  n'est pas Lebesgue mesurable.

**Exercice 8.** \* (ensembles de Cantor) On enlève un intervalle ouvert  $I_{1,1}$  de longueur  $< 1$  du centre de l'intervalle  $[0, 1]$ . Il reste deux intervalles fermés  $J_{1,1}$  et  $J_{1,2}$ , chacun de longueur  $< \frac{1}{2}$ . Ensuite on enlève les intervalles ouverts  $I_{2,1}$  et  $I_{2,2}$  du centre de  $J_{1,1}$ , respectivement de  $J_{1,2}$ . Il reste 4 intervalles fermés  $J_{2,1}$ ,  $J_{2,2}$ ,  $J_{2,3}$ ,  $J_{2,4}$ . On procède par récurrence: après la  $n^{eme}$  étape on se retrouve avec  $2^n$  intervalles fermés disjoints (numérotés de la gauche vers la droite)  $J_{n,1}, \dots, J_{n,2^n}$ , chacun de longueur  $< \frac{1}{2^n}$ . À la  $(n+1)^{eme}$  étape on enlève un intervalle ouvert  $I_{n+1,k}$  du centre de  $J_{n,k}$  (la longueur de  $I_{n+1,k}$  est toujours strictement plus petite que celle de  $J_{n,k}$ ). On obtient ainsi  $2^{n+1}$  intervalles fermés  $J_{n+1,1}, \dots, J_{n+1,2^{n+1}}$ , chacun de longueur  $< \frac{1}{2^{n+1}}$ . On note  $V_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}$  et  $P_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$ . Soit

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = [0, 1] \setminus \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \right).$$

Un ensemble  $P$  obtenu comme ci-dessus s'appelle *ensemble de type Cantor*. Dans le cas où la longueur de  $I_{n+1,k}$  est exactement  $\frac{1}{3}$  de la longueur de  $J_{n,k}$  pour chaque  $n$  et  $k$ , l'ensemble  $C$  ainsi obtenu s'appelle *l'ensemble triadique de Cantor*.

a) Soit  $P$  un ensemble de type Cantor. Montrer qu'il est fermé, que son intérieur est vide et que  $P' = P$ . (Rappel:  $P'$  est l'ensemble de points d'accumulation  $x$  de  $P$ , c'est-à-dire,  $x \in \mathbb{R}$  tel que pour tout voisinage  $V$  de  $x$  on a  $V \cap P \setminus \{x\} \neq \emptyset$ .)

b) Soit  $C$  l'ensemble triadique de Cantor. Montrer que  $C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid x_n \in \{0, 2\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

Montrer qu'il existe une bijection  $\varphi : C \longrightarrow [0, 1]$ .

c) Montrer que  $C$  est Borel mesurable et sa mesure de Lebesgue est nulle.

d) On admet qu'il existe une bijection entre  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe des ensembles Lebesgue mesurables qui ne sont pas Borel mesurables. (*Ind.: Considérer les parties de  $C$ .*)

**Exercice 9.** a) Un ouvert de  $\mathbb{R}$  de mesure finie est-il nécessairement borné ?

b) Un borélien de  $\mathbb{R}$  de mesure de Lebesgue positive contient-il toujours un ouvert non-vide?

## Mesures extérieures (hors programme)

**Définition.** On appelle *mesure extérieure* sur un ensemble  $X$  une application  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$  ayant les propriétés suivantes:

- i)  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,
- ii) Si  $A \subset B$  alors  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$  (monotonie),
- iii)  $\mu^*(\cup_{n \geq 1} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$  (sous-additivité dénombrable).

**Exercice 1.**

a) Montrer que toute mesure définie sur  $\mathcal{P}(X)$  est aussi une mesure extérieure.

b) Soit  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$  définie par  $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ 1 & \text{si } A \neq \emptyset. \end{cases}$  Montrer que  $\mu^*$  est une mesure extérieure mais n'est pas une mesure.

c) Soit  $\mu^*$  une mesure extérieure telle que  $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$  quelque soient  $A, B \subset X$  tels que  $A \cap B = \emptyset$ . Montrer que  $\mu^*$  est une mesure sur  $\mathcal{P}(X)$ .

**Définition.** Soit  $X$  un ensemble et soit  $\mu^*$  une mesure extérieure sur  $\mathcal{P}(X)$ . Un ensemble  $A \subset X$  est dit *mesurable par rapport à  $\mu^*$*  si

$$\forall E \subset X, \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \quad (1)$$

On note  $\mathcal{M}_{\mu^*} = \{A \subset X \mid A \text{ est mesurable par rapport à } \mu^*\}$ .

**Exercice 2.** a) Montrer que  $\emptyset, X \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ .

b) Montrer que  $A \in \mathcal{M}_{\mu^*} \Leftrightarrow (\forall E \subset X, \quad \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)).$

c) Montrer que  $A \in \mathcal{M}_{\mu^*} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ .

**Exercice 3.** (Théorème de Carathéodory) Soit  $\mu^*$  une mesure extérieure sur  $\mathcal{P}(X)$ .

a) Montrer que si  $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ , alors  $A \cup B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ . (Ind.: Soit  $E \subset X$ . Écrire (1) pour les paires:  $(E, A)$ ,  $(E, B)$ ,  $(E \cap B, A)$ ,  $(E \cap B^c, A)$ ,  $(E \cap (A \cup B), A)$ . Utiliser les relations obtenues et b) de l'exercice précédent pour montrer que  $(E, A \cup B)$  satisfait (1).)

b) Montrer que si  $A_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A_i \cap A_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ , alors  $\cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ .

c) Montrer que  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  est une  $\sigma$ -algèbre.

d) On note  $\mu$  la restriction de  $\mu^*$  à  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ . Montrer que  $\mu$  est une mesure sur  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ .

e) Montrer que si  $A \subset B \subset X$  et  $\mu^*(B) = 0$ , alors  $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  et  $\mu(A) = 0$  (c'est-à-dire,  $\mu$  est une mesure complète sur la tribu  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ ).

**Exercice 4.** Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  une algèbre (pas nécessairement une tribu). Soit  $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$  une fonction telle que

i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,

ii) Si  $(A_n)_{n \geq 1}$  est une famille dénombrable d'ensembles *disjoints* de  $\mathcal{A}$  telle que  $\cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$ , alors

$$\mu(\cup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(On dit que  $\mu$  est une mesure définie sur l'algèbre  $\mathcal{A}$ .)

Pour  $E \in \mathcal{P}(X)$  on définit

$$\bar{\mu}(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid A_n \in \mathcal{A} \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } E \subset \cup_{n \geq 1} A_n \right\}.$$

a) Montrer que  $\bar{\mu}$  est une mesure extérieure sur  $\mathcal{P}(X)$ .

b) Montrer que la restriction de  $\bar{\mu}$  à  $\mathcal{A}$  coïncide avec  $\mu$ .

c) Montrer que tous les éléments de  $\mathcal{A}$  sont mesurables par rapport à  $\bar{\mu}$  au sens de (1).

## Construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (hors programme)

**Exercice 5.** On note  $\mathcal{I} = \{[a, b[ \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ . Pour chaque  $I = [a, b[ \in \mathcal{I}$ , on note par  $\ell(I) = b - a$  la longueur de l'intervalle  $I$ . Soit  $I = [a, b[ \in \mathcal{I}$  et soient  $I_n = [a_n, b_n[ \in \mathcal{I}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , tels que  $I \subset \cup_{n \geq 1} I_n$ . L'objectif de cet exercice est de montrer que

$$\ell(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n). \quad (2)$$

On peut supposer que  $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \infty$  (sinon (2) a évidemment lieu).

a) Montrer que si  $K, K_1, \dots, K_n \in \mathcal{I}$  et  $K \subset K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$ , alors  $\ell(K) \leq \sum_{j=1}^n \ell(K_j)$ .

b) Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Alors il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $b_{n_0} > b - \frac{\varepsilon}{4}$ . On pose  $J_n = \begin{cases} [a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n[ & \text{si } n \neq n_0, \\ [a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2^{n_0+1}}, b_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}[ & \text{si } n = n_0. \end{cases}$

On note par  $\text{int}(J_n)$  l'intérieur de  $J_n$  (c'est-à-dire l'intervalle ouvert ayant les mêmes extrémités). Mon-

trer que  $[a, b] \subset \bigcup_{n \geq 1} \text{int}(J_n)$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon$ .

c) Montrer que de tout recouvrement d'un intervalle  $[a, b]$  par des intervalles ouverts on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

d) Montrer que  $\ell(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon$  et conclure.

**Exercice 6.** (La mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ )

On utilise les notations de l'exercice précédent. On définit  $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$  par

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \mid I_n \in \mathcal{I} \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } A \subset \cup_{n \geq 1} I_n \right\}.$$

a) Montrer que  $\lambda^*$  est une mesure extérieure sur  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  (qu'on appelle mesure extérieure de Lebesgue).

On note  $\mathcal{M}$  la  $\sigma$ -algèbre des ensembles mesurables par rapport à  $\lambda^*$  au sens de (1). Les éléments de  $\mathcal{M}$  sont les ensembles Lebesgue mesurables. On note  $\lambda$  la restriction de  $\lambda^*$  à  $\mathcal{M}$ . La mesure  $\lambda$  est appelée *mesure de Lebesgue*.

b) Montrer que  $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$  et  $\lambda(I) = \ell(I)$  pour tout  $I \in \mathcal{I}$ .

c) Montrer que  $\mathcal{M}$  contient tous les ensembles boréliens de  $\mathbb{R}$ .

d) Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . Montrer que  $\lambda^*(A) = 0$  si et seulement si  $A \in \mathcal{M}$  et  $\lambda(A) = 0$ .

e) Soit  $a \in \mathbb{R}$  fixé et soit  $A \subset \mathbb{R}$ . On note  $T_a A = \{x + a \mid x \in A\}$  ( $T_a$  est la translation par la constante  $a$ ). Montrer que  $\lambda^*(A) = \lambda^*(T_a A)$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $A \in \mathcal{M}$  si et seulement si  $T_a A \in \mathcal{M}$ .

f) Pour  $A \subset \mathbb{R}$  et  $\rho > 0$ , on note  $D_\rho A = \{\rho x \mid x \in A\}$  ( $D_\rho A$  est la dilatation de l'ensemble  $A$  par  $\rho$ ). Montrer que pour tout  $A \subset \mathbb{R}$  et  $\rho > 0$  on a  $\lambda^*(D_\rho A) = \rho \cdot \lambda^*(A)$ . Montrer que  $A \in \mathcal{M}$  si et seulement si  $D_\rho A \in \mathcal{M}$  pour tout  $\rho > 0$ .