
Feuille n° 1 - Algèbres, Tribus

Exercice 1. Soient A, B, C des parties d'un ensemble X . Établir les formules suivantes:

- a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,
- b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
- c) $B^c \setminus A^c = A \setminus B$,
- d) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,
- e) $A^c \Delta B^c = A \Delta B$,
- f) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Exercice 2. Soit X un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une algèbre de parties de X . Montrer que

- a) $X, \emptyset \in \mathcal{A}$,
- b) Si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$,
- c) Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, alors $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}$ et $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$.

Exercice 3.

- a) Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres d'un ensemble X . Montrer que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est une algèbre.
- b) Soit \mathcal{E} une famille non-vide de parties de X . On note $\alpha(\mathcal{E})$ l'intersection de toutes les algèbres contenant la famille \mathcal{E} . Montrer que

- i) $\alpha(\mathcal{E})$ est une algèbre.
- ii) Si \mathcal{A} est une algèbre contenant \mathcal{E} , alors $\alpha(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

On appelle $\alpha(\mathcal{E})$ l'algèbre engendrée par \mathcal{E} . C'est la "plus petite" algèbre contenant \mathcal{E} .

- c) Soient \mathcal{E} et $\tilde{\mathcal{E}}$ deux familles non-vides de parties de X telles que $\mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{E}}$. Montrer que $\alpha(\mathcal{E}) \subset \alpha(\tilde{\mathcal{E}})$.
- De plus, si on dénote

$$\mathcal{E}^{comp} = \{A^c \mid A \in \mathcal{E}\},$$

montrer que $\alpha(\mathcal{E}) = \alpha(\mathcal{E}^{comp})$. (Attention: À ne pas confondre \mathcal{E}^{comp} et $\mathcal{E}^c = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{E}$.)

- d) Soit \mathcal{E} une famille non-vide de parties de X et $\sigma(\mathcal{E})$ la tribu engendrée par \mathcal{E} . Comparer $\alpha(\mathcal{E})$ et $\sigma(\mathcal{E})$.

Exercice 4. Soit E une partie d'un ensemble X et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Déterminer l'algèbre de parties de X engendrée par \mathcal{F} , dans les cas suivants :

- 1. $\mathcal{F} = \{E\}$.
- 2. $\mathcal{F} = \{E^c\}$.
- 3. $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid E \subset A\}$.

Exercice 5. Soit X un ensemble infini.

- 1. On considère la famille $\mathcal{A} = \{E \subset X \mid E \text{ est fini ou } E^c \text{ est fini}\}$.
 - a) Démontrer que \mathcal{A} est une algèbre de parties de X .
 - b) Démontrer que \mathcal{A} n'est pas une tribu.
- 2. On suppose X infini et non dénombrable. Déterminer la tribu engendrée par

$$\mathcal{F} = \{E \subset X \mid E \text{ est fini}\}.$$

Exercice 6. La tribu borélienne de \mathbb{R} est engendrée par l'une quelconque des familles suivantes :

- 1) La famille des intervalles ouverts bornés,
- 2) La famille des intervalles de la forme $] - \infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$,
- 3) La famille des intervalles de la forme $] - \infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$,
- 4) La famille des intervalles de la forme $]a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$,
- 5) La famille des intervalles de la forme $[a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. a) Soit X un ensemble. Soient A_1, A_2, \dots, A_n des parties *disjointes* et non-vides telles que $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = X$. Décrire l'algèbre engendrée par A_1, \dots, A_n . Combien d'éléments compte cette algèbre ? Est-ce une tribu ?

b) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de parties disjointes d'un ensemble X telle que $\bigcup_{n \geq 1} A_n = X$. Décrire l'algèbre et la tribu engendrées par la famille $(A_n)_{n \geq 1}$.

c*) (hors programme) Montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie et dénombrable.

Exercice 8. Soient \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 deux tribus d'un ensemble X . On note

$$\mathcal{I} = \{A_1 \cap A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}, \quad \mathcal{U} = \{A_1 \cup A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}.$$

Montrer que les trois tribus suivantes sont les mêmes:

a) $\sigma(\mathcal{I})$ b) $\sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ c) $\sigma(\mathcal{U})$.

Exercice 9.

- a) Montrer que toute tribu est aussi une algèbre.
- b) Donner un exemple d'algèbre qui n'est pas tribu.