

Résumé du cours d'Intégration 2015-2016

September 30, 2015

Contents

1	Espaces mesurés	1
1.1	Tribus	1
1.2	Mesures	2
1.3	Complétion des mesures	2
1.4	Lemme de classe monotone. Unicité des mesures.	3
2	Intégration par rapport à une mesure positive	4
2.1	Fonctions mesurables	4
2.2	Fonctions étagées	5
2.3	L'intégrale des fonctions étagées positives	6
2.4	L'intégrale des fonctions mesurables positives	6

1 Espaces mesurés

1.1 Tribus

1. Définition. Tribu (σ -algèbre).

Exemples (triviaux): $\{\emptyset, X\}$ ou $\mathcal{P}(X)$.

2. Propriétés élémentaires. Soit \mathcal{A} une tribu. Alors:

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
- Si $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$, alors $\bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

3. Théorème. Une intersection quelconque de tribus est une tribu.

Démonstration.

4. Définition. $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ tribu, } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$ est la tribu engendrée par la famille $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$.

5. Exemple. Soit (X, d) espace métrique. On note $\mathcal{B}(X)$ la tribu engendrée par les ouverts de X . On l'appelle la tribu des boréliens. Exo: $\mathcal{B}(X)$ est aussi engendrée par les fermés de X .

6. Exemple. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par chacune des familles suivantes:

$\mathcal{I}_1 = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, $\mathcal{I}_2 = \{]-\infty, a[\mid a \in \mathbb{R}\}$, etc. Exercice à faire en TD.

7. Définition. Algèbre.

8. Propriétés élémentaires. Soit \mathcal{A} une algèbre. Alors:

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
- $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ et $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$.

9. Remarque. Toute tribu est une algèbre. La réciproque est fausse. (Exo: Donner un contre-exemple.)

1.2 Mesures

1. Définition. Soit \mathcal{A} une tribu sur X . Une mesure (positive) sur \mathcal{A} est une application

$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ telle que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. Si $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ est une suite d'ensembles **disjoints** on a $\mu(\cup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

2. Conséquences de la définition. (avec démonstration pour chacune)

C1. Si A_1, A_2 sont disjoints, $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

C2. (Monotonie) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

C3. $A \subset B$ et $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

C4. (continuité supérieure) $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}, A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \mu(\cup_{n \geq 1} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

C5. (continuité inférieure) $A_{n+1} \subset A_n$ et $\mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu(\cap_{n \geq 1} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

C6. (σ -sous-additivité) Pour A_n ensembles mesurables quelconques, on a

$$\mu(\cup_{n \geq 1} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

3. Exemples.

a) Mesure de Dirac.

b) Mesure de comptage.

c) Mesure de Lebesgue sur les boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$: il existe une unique mesure $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ appelée mesure de Lebesgue telle que $\lambda([a, b]) = b - a$ pour tout intervalle ouvert $]a, b[\subset \mathbb{R}$.

De plus, λ est une mesure diffuse, i.e., $\lambda(\{x\}) = 0$ en tout point $x \in \mathbb{R}$.

Généralisation sur \mathbb{R}^N en dimension $N \geq 1$. Pavé de \mathbb{R}^N . Volume d'un pavé. Mesure de Lebesgue λ sur l'espace $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$.

Contre-exemple: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, $\mu(A) = \begin{cases} \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{si } A \text{ est fini,} \\ \infty & \text{si } A \text{ est infini} \end{cases}$ n'est pas une mesure sur \mathcal{A} .

4. Définition. Mesure finie, σ -finie. Mesure de probabilité.

1.3 Complétion des mesures

1. Définition. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. On dit que $A \subset X$ est *négligeable* pour μ si $A \in \mathcal{A}$ et $\mu(A) = 0$.

On dit que la mesure μ est *complète* sur \mathcal{A} si tout sous-ensemble d'un ensemble négligeable est négligeable.

2. Remarque. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ n'est pas complet. Ensemble C triadique de Cantor (voir les preuves dans l'exercice du TD). Sous-ensemble nonborélien de C par rapport à λ .

On peut toujours compléter une mesure:

3. Théorème. Soit (X, \mathcal{A}, μ) espace mesuré et soit

$$\mathcal{A}^* = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A}, \exists B \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu(B) = 0 \text{ et } N \subset B\}.$$

On définit $\mu^* : \mathcal{A}^* \rightarrow [0, \infty]$ par $\mu^*(A \cup N) = \mu(A)$. Alors \mathcal{A}^* est une tribu, μ^* est bien définie et elle est une mesure complète sur \mathcal{A}^* ; en conséquent, $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ est un espace mesuré complet. On a $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$, $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$ et $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ est la plus petite extension complète de (X, \mathcal{A}, μ) .

Démonstration.

4. Définition. Tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$. Ensemble Lebesgue mesurable. Mesure de Lebesgue complète sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, notée encore λ . Propriété d'invariance par translation et rotation. Propriétés de régularité intérieure et extérieure (sans démonstration).

1.4 Lemme de classe monotone. Unicité des mesures.

1. Définition. (Classe monotone) Une famille $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ est une *classe monotone* si:

- i) $X \in \mathcal{M}$;
- ii) Pour $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{M}$;
- iii) Pour toute suite croissante $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}$ (i.e., $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n$) on a $\cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}$.

2. Remarque. a) Toute tribu est une classe monotone.

b) Une classe monotone stable par réunion (ou intersection) finie est une tribu.

c) Il existe des classes monotones qui ne sont pas des algèbres et des algèbres qui ne sont pas des classes monotones. Exemples: voir TD.

3. Proposition. Une intersection de classes monotones est classe monotone.

Démonstration = exercice.

4. Définition. Classe monotone engendrée $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

5. Lemme de classe monotone. Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ est une famille stable par intersection finie, alors $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

Démonstration détaillée.

6. Théorème (Unicité des mesures positives). Soit μ et ν deux mesures positives sur (X, \mathcal{A}) et $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ une famille telle que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ et \mathcal{E} est stable par intersection finie.

a) Cas des mesures finies: Si $\mu(X) = \nu(X) < \infty$, la condition $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{E}$ implique que $\mu = \nu$ sur \mathcal{A} .

b) Cas des mesures σ -finies: Si $\mu(X) = \nu(X) = \infty$, alors la conclusion précédente reste valable à condition qu'il existe une suite croissante d'ensembles $X_n \in \mathcal{E}$ telle que $\cup_n X_n = X$ et $\mu(X_n) = \nu(X_n) < \infty$.

Démonstration.

7. Corollaire. Unicité de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N .

2 Intégration par rapport à une mesure positive

2.1 Fonctions mesurables

1. Définition. Soient (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) deux espaces mesurables. Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est dite *mesurable* (ou $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable) si pour tout $B \in \mathcal{B}$ on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

2. Exemple. a) Soit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Alors toute fonction $f : X \rightarrow Y$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable pour toute tribu \mathcal{B} de Y .

b) Soit $\mathcal{B} = \{\emptyset, Y\}$. Alors toute fonction $f : X \rightarrow Y$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable pour toute tribu \mathcal{A} de X .

c) Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et $A \subset X$. Alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A : X \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

3. a) Tribu image de \mathcal{A} par f . Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Alors

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

est une tribu de parties de Y qui rend $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ mesurable. De plus, \mathcal{B} est la plus grande tribu de parties de Y telle que f soit mesurable.

b) Tribu engendrée par f sur X . Soit (Y, \mathcal{B}) un espace mesurable et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Alors

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{P}(X)$$

est une tribu de parties de X qui rend $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ mesurable. De plus, \mathcal{A} est la petite tribu de parties de X telle que f soit mesurable.

4. Lemme. Soient (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) deux espaces mesurables et $f : X \rightarrow Y$. Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ tel que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$. Alors f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{E}$ on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Démonstration.

5. Exemple. Soient (X, d_1) et (Y, d_2) deux espaces métriques. Alors toute fonction continue $f : X \rightarrow Y$ est borélienne, c'est-à-dire, $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$ -mesurable.

Remarque: Il se peut qu'une fonction continue ne soit pas mesurable si l'on choisit des tribus différentes de $\mathcal{B}(X)$ et $\mathcal{B}(Y)$.

Convention. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et soit $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On dit que f est mesurable si f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ -mesurable. (Rappel: $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{[a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\})$.)

6. Théorème. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et soit $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) f est mesurable.
- ii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $f^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{A}$.
- iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$.
- iv) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $f^{-1}([-\infty, a[) \in \mathcal{A}$.
- v) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $f^{-1}(]a, \infty]) \in \mathcal{A}$.
- vi) pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ on a $f^{-1}(]a, b[) \in \mathcal{A}$.

7. Théorème. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont mesurables, alors $g \circ f$ est mesurable.
Démonstration.

8. Exercice. Soit $O \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Alors il existe une suite de rectangles ouverts $(]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[)_{n \geq 1}$ telle que $O = \bigcup_{n \geq 1}]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[$. Dédurre que $\mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

9. Théorème. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable. Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables et $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $x \in X \rightarrow h(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable.

Démonstration.

10. Théorème. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable. Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Alors $f + g$, $f - g$, fg , $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = \max(-f, 0)$ sont mesurables. Si $g \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est aussi mesurable.

Démonstration.

11. Définition. $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\liminf f_n$, $\limsup f_n$

12. Théorème. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable. Soit $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctions mesurables. Alors $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ sont mesurables. En particulier, si $f(x) := \lim_n f_n(x)$ existe en tout point $x \in X$, alors f est mesurable. Plus généralement, l'ensemble

$$\{x \in X \mid \liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)\}$$

est mesurable.

Démonstration.

2.2 Fonctions étagées

1. Définition. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable. Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est *étagée* (ou *simple*) si

1. $f(X)$ est un ensemble fini: $f(X) = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$, où $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$.
2. Pour tout $i = 1, \dots, n$, $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ est mesurable.

2. Remarque. (A_1, \dots, A_n) est une partition mesurable de X et $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ est l'*écriture canonique* de f . À noter que f admet plusieurs écritures de la forme $f = \sum_{j=1}^N b_j \mathbf{1}_{B_j}$ où $b_j \in \mathbb{R}$ ne

sont pas nécessairement distincts et les ensembles $B_j \in \mathcal{A}$ ne sont pas nécessairement disjoints.

Rappel: La fonction $\mathbf{1}_A$ est mesurable ssi $A \in \mathcal{A}$, auquel cas $\mathbf{1}_A$ est étagée.

3. Remarque. a) Une fonction étagée est mesurable.

b) Si f, g sont deux fonctions étagées, alors $f + g$, fg , αf , f_+ , f_- , $|f|$ sont étagées.

4. Théorème (de Borel) Soit $f : X \rightarrow [0, \infty]$ une fonction mesurable et positive. Alors il existe une suite croissante $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions étagées positives $f_n : X \rightarrow [0, \infty[$ telle que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in X$. De plus, si f est bornée, alors $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur X .

Démonstration.

5. Corollaire. Soit $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. Il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions étagées telle que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in X$. De plus, si f est bornée, on peut choisir $(f_n)_{n \geq 1}$ telle que la convergence soit uniforme sur X .

2.3 L'intégrale des fonctions étagées positives

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Convention: $0 \cdot \infty = 0$.

1. Définition. Soit $f : X \longrightarrow [0, \infty[$ une fonction étagée *positive*. On écrit f sous la forme canonique $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ où $a_i \neq a_j$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. L'intégrale de f par rapport à μ est la quantité

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) \in [0, \infty].$$

2. Proposition. La définition ne dépend pas de l'écriture de $f = \sum_{j=1}^N b_j \mathbf{1}_{B_j}$ où $b_j \in [0, \infty[$ ne sont pas nécessairement distincts et les ensembles $B_j \in \mathcal{A}$ ne sont pas nécessairement disjoints, i.e., $\int_X f d\mu = \sum_{j=1}^N b_j \mu(B_j)$.

3. Notation. $\mathcal{E}_+ = \{f : X \longrightarrow [0, \infty[\text{ fonctions étagées positives} \}$.

4. Proposition. Propriétés de l'intégrale: pour tout $f, g \in \mathcal{E}_+$,

1. Additivité: $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$

2. $\alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu.$

3. Monotonie: $f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$

2.4 L'intégrale des fonctions mesurables positives

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ une fonction mesurable.

1. Définition. On définit

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X h d\mu \mid h \in \mathcal{E}_+, h \leq f \right\} \quad \text{et}$$

$$\int_E f d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_E d\mu, \quad E \in \mathcal{A}.$$

2. Propriétés de l'intégrale des fonctions positives.

1. (monotonie) $f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$

2. (homogénéité) Pour $\alpha \in [0, \infty[$ on a $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu.$

3. $E \subset F \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$

Démonstration.

3. Théorème de convergence monotone. (Beppo Levi) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives telle que $f_n \leq f_{n+1}$ et $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ en tout point $x \in X$.

Alors $\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu.$

Démonstration.

4. Additivité. f, g mesurables positives $\Rightarrow \int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.
Démonstration.

5. Additivité dénombrable (intersion somme / intégrale) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite quelconque de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Démonstration.

4. Corollaire. Soit f une fonction mesurable positive. On définit $\mu_f : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ par $\mu_f(A) = \int_A f d\mu$. Alors μ_f est une mesure sur (X, \mathcal{A}) .
Démonstration.

5. Exercice. Soient f, g fonctions mesurables positives. Montrer que $\int_X g d\mu_f = \int_X fg d\mu$.

6. Définition. Propriété $P(x)$ ($x \in X$) vraie presque partout (notée μ -p.p.): elle a lieu en dehors d'un ensemble négligeable. Exemples: $f \geq 0$ μ -p.p., $f = g$ μ -p.p., f continue μ -p.p., $f_n \rightarrow f$ μ -p.p. où f, g, f_n sont mesurables.

6. Proposition. Soit f fonction mesurable positive. Alors

i) Pour tout $a > 0$, alors $\mu(\{x \in X \mid f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_X f d\mu$.

ii) $\int_X f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ -p.p.

iii) Si $\int_X f d\mu < \infty$, alors $f < \infty$ μ -p.p.

iv) Si f, g deux fonctions mesurables positives telles que $f = g$ μ -p.p., alors $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.
Démonstration.

9. Lemme de Fatou. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Démonstration.

Exemple. Donner un exemple où l'inégalité du Lemme de Fatou est stricte.

Le cours s'arrêtait ici le 30 Septembre 2015.