

L3 MAF - Intégration
Devoir surveillé 2 octobre 2015

Exercice 1. Soit E un ensemble, \mathcal{F} une tribu de E et $B \subset E$.

1. Montrer que $\mathcal{F}_B = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu de B .
2. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ une classe de parties de E et soit \mathcal{C}_B la trace sur B de \mathcal{C}

$$\mathcal{C}_B = \{C \cap B : C \in \mathcal{C}\}$$

On note

- $\sigma(\mathcal{C})$ la plus petite tribu qui contient \mathcal{C} ;
 - $\sigma_B(\mathcal{C}_B)$ la plus petite tribu sur B qui contient \mathcal{C}_B ;
 - $\sigma(\mathcal{C})_B = \{A \cap B \mid A \in \sigma(\mathcal{C})\}$ la tribu trace sur B de $\sigma(\mathcal{C})$
- (a) Montrer que $\mathcal{C}_B \subset \sigma(\mathcal{C})_B$.
 - (b) En déduire que $\sigma_B(\mathcal{C}_B) \subset \sigma(\mathcal{C})_B$.
 - (c) On se propose de montrer l'inclusion inverse.
 - i. Montrer que $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(E) : A \cap B \in \sigma_B(\mathcal{C}_B)\}$ est une tribu sur E .
 - ii. Montrer que $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.
 - iii. On note \mathcal{F}_B la trace de la tribu \mathcal{F} sur B . Montrer que $\sigma(\mathcal{C})_B = \mathcal{F}_B$.
 - iv. En déduire $\sigma(\mathcal{C})_B = \sigma_B(\mathcal{C}_B)$.

Exercice 2.

1. Soit \mathcal{B} la tribu borélienne sur \mathbb{R} , λ la mesure de Lebesgue. La mesure de Dirac au point 1 est

$$\forall A \in \mathcal{B}, \quad \delta_1(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in A, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application $\mu = \sup(\lambda, \delta_1)$ définie

$$\forall A \in \mathcal{B}, \quad \mu(A) = \sup(\lambda(A), \delta_1(A))$$

est-elle une mesure sur \mathcal{B} ?

2. Soit $(a_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de $[0, +\infty]$ tels que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(a_{n,p})_n$ est croissante de limite notée $a_p \leq \infty$. Le but de cette question est de montrer que $\lim_n \sum_{p=1}^{\infty} a_{n,p} = \sum_{p=1}^{\infty} a_p$.
 - (a) Montrer que $\lim_n \sum_{p=1}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=1}^{\infty} a_p$.
 - (b) Montrer que $(\sum_{p=1}^{\infty} a_{n,p})_n$ est une suite croissante.
 - (c) Soit p_0 fixé, montrer que $\lim_n \sum_{p=1}^{\infty} a_{n,p} \geq \sum_{p=1}^{p_0} a_p$.
 - (d) Conclure que $\lim_n \sum_{p=1}^{\infty} a_{n,p} = \sum_{p=1}^{\infty} a_p$.
3. Soit (X, \mathcal{F}) un espace mesurable et $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de mesures (positives) définies sur \mathcal{F} , c'est-à-dire, pour tout $A \in \mathcal{F}$, la suite numérique $(\mu_n(A))_{n \geq 1}$ est croissante et on pose $\mu(A) = \sup_{n \geq 1} \mu_n(A)$. Montrer que μ est une mesure \mathcal{F} .

Tourner la page S.V.P.

Exercice 3.

1. Soit f une application continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Soit $a < b$.

i. Montrer qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ $f([a, b]) = [m, M]$

ii. En déduire que $f(]a, b[)$ est un borélien de \mathbb{R} .

(b) Montrer que l'image par f d'un ouvert \mathbb{R} est un borélien de \mathbb{R} .

2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $A = \{x \in [0, 1] \mid f'(x) = 0\}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $K_n = \{k \in \{1, \dots, n\} \mid [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \cap A \neq \emptyset\}$.

(a) Montrer que $f(A)$ est un fermé de \mathbb{R} .

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(A) \subset \cup_{k \in K_n} f([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}])$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in K_{n_0}$, $f'([\frac{k-1}{n_0}, \frac{k}{n_0}]) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$.

(Indication: On pourra utiliser la continuité uniforme de f' .)

(d) En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in K_{n_0}$, $\lambda(f([\frac{k-1}{n_0}, \frac{k}{n_0}])) < \frac{2\varepsilon}{n_0}$,
 λ désignant la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

(e) Déduire de ce qui précède que $\lambda(f(A)) = 0$.