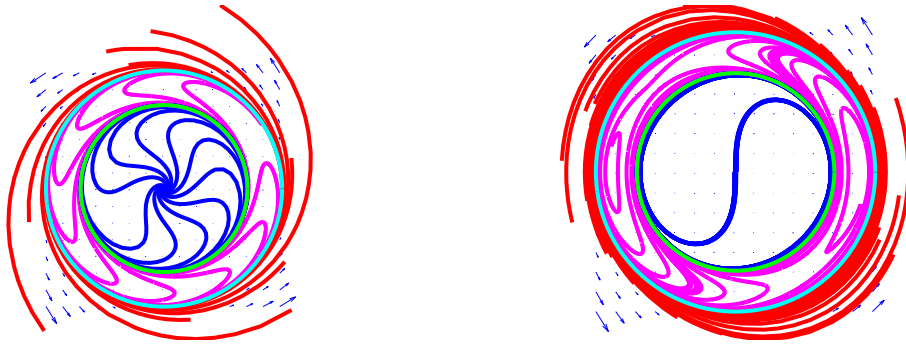


# Équations différentielles ordinaires

Jean Claude Yakoubsohn

Institut de Mathématiques de Toulouse.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités</b>	<b>5</b>
1.1	Introduction . . . . .	5
1.2	Vocabulaire et cadre d'étude . . . . .	6
1.3	Exemples historiques . . . . .	7
1.3.1	Enveloppe d'une famille de droites . . . . .	7
1.3.2	Caustique du cercle unité . . . . .	8
1.3.3	Courbure . . . . .	8
1.3.4	Isochrone de Leibnitz . . . . .	9
1.3.5	La tractrice . . . . .	9
1.3.6	La chaînette . . . . .	9
1.3.7	Le brachistochrone . . . . .	10
1.3.8	Quelques équations différentielles classiques. . . . .	11
<b>2</b>	<b>Équations différentielles à coefficients constants</b>	<b>13</b>
2.1	Résolution . . . . .	13
2.2	Comportement des solutions. Portrait de Phase . . . . .	14
2.2.1	Cas des valeurs propres réelles . . . . .	15
2.2.2	Cas des valeurs propres complexes . . . . .	16
2.2.3	Cas nilpotent . . . . .	17
2.2.4	Classification géométrique des portraits de phase . . . . .	18
2.2.5	Le calcul des solutions. . . . .	19
2.2.6	Stabilité . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Équations différentielles linéaires non autonomes</b>	<b>21</b>
3.1	$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$ . . . . .	21
3.2	$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t})$ . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Équations différentielles non linéaires</b>	<b>25</b>
4.1	Le théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	25

4.2	Remarques et prolongements . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Solutions maximales, Flots</b>	<b>29</b>
5.1	Continuité des solutions par rapport aux conditions initiales . . . . .	29
5.2	Solutions maximales, solutions globales . . . . .	30
5.3	Flots . . . . .	31
<b>6</b>	<b>La méthode d'Euler</b>	<b>33</b>
<b>7</b>	<b>Exemples</b>	<b>39</b>
7.1	Dynamique des populations . . . . .	39
7.1.1	Le modèle logistique . . . . .	39
7.1.2	Proies-Prédateurs . . . . .	39
7.2	Exemples de systèmes hamiltoniens en mécanique . . . . .	42
7.2.1	Le pendule simple . . . . .	42
7.2.2	Le problème de Képler . . . . .	42
7.3	Circuits électriques . . . . .	43

# Chapitre 1

## Généralités

### 1.1 Introduction

La modélisation de problèmes de la "Nature" aboutit à des équations. Par "Nature" on entend les différentes modélisations provenant de la physique, de la chimie, de la biologie, et de l'économie. Dans ce cours on étudie une classe d'équations particulièrement importante : celle des équations différentielles ordinaires (edo). Un des premiers modèles étudié est celui du pendule simple. Ce que l'on cherche c'est la fonction  $\theta(t)$  qui décrit la variation de l'angle que fait le pendule avec l'axe vertical (dirigé vers le bas !) connaissant  $\theta(0)$ . On trouve que  $\theta(t)$  doit vérifier le système d'équations

$$\ddot{\theta} = -g/l \sin \theta, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (1.1.1)$$

où  $l$  est la longueur du fil et  $g$  l'accélération de la pesanteur. La première équation est une edo et la deuxième est la condition initiale. Mais il n'est pas possible d'obtenir une forme explicite d'une primitive de  $\sin \theta(t)$ . On remarque que si  $\theta = 0$  alors  $\dot{\theta}(t) = 0$  : le pendule ne bouge pas. Si on suppose  $\theta_0$  petit (i.e,  $\theta^2 \ll \theta$  les oscillations du pendule seront proches de l'équilibre. Alors on peut penser qu'il est raisonnable de dire que la solution  $x(t)$  du système

$$\ddot{x} = -g/lx, \quad x(0) = \theta_0 \quad (1.1.2)$$

est proche de celle du système 1.1.1. L'edo du système précédent est une edo linéaire du second ordre et se résout facilement. On remarque que l'edo du système 1.1.1 se ramène au système différentiel non linéaire du premier ordre en posant  $x = \theta$  :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g/l \sin x \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Ce système différentiel appartient à la classe des edo non linéaires du type :

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1.4)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $f$  est une fonction continue définie d'un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On dit que les edo du type 1.1.4 sont **autonomes**. Plus généralement la fonction  $f$  de l'edo peut être dépendante de la variable  $t$ . Dans ce cas les edo du type

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.1.5)$$

sont dites **non autonomes**. Bien souvent la variable  $t$  représente le temps. En fait les edo du 1.1.5 peuvent se ramener sous la forme des edo 1.1.4. En effet, en posant  $y = (t, x)^T$ , l'edo 1.1.5 s'écrit

$$\dot{y} = g(y)$$

avec  $g(y) := g(t, x) = (1, f(t, x))^T$ .

Pour des raisons d'ordre historique, physique, pratique et pédagogique on énoncera les résultats mathématiques pour des edo 1.1.5 appelés non autonomes : le "temps" apparaît explicitement dans le second membre.

Le résultat principal de ce cours est le théorème de Cauchy-Lipschitz. C'est un résultat d'existence et d'unicité de solution de l'edo 1.1.5 sous l'hypothèse que le second membre de cette edo soit une fonction lipschitzienne par rapport à la variable  $x$ .

**Définition 1.** On appelle problème de Cauchy associé à une edo et à une condition initiale le système

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.1.6)$$

**Théorème 1.** Soit  $f(t, x)$  une fonction continue définie de  $[a, b] \times U$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que la fonction  $f(t, x)$  est lipschitzienne par rapport à  $x$  sur  $[a, b] \times U$ , c'est à dire pour tout  $t \in [a, b]$  et  $u_1, u_2$  dans  $U$  il existe une constante  $L$  telle que :

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|. \quad (1.1.7)$$

Soit  $x_0 \in U$ . Alors le problème de Cauchy 1.1.6 a une solution  $x(t)$  unique définie sur  $[a, b]$  dans  $U$ .

## 1.2 Vocabulaire et cadre d'étude

- 1- On nomme les équations 1.1.4 ou 1.1.5 indifféremment edo, systèmes ou systèmes différentielles.
- 2- La fonction  $f$  de l'edo est en général lipschitzienne ou de classe  $C^1$  mais la plupart du temps c'est une fonction analytique, un polynôme ou une fonction élémentaire.
- 3- On appelle trajectoire ( ou encore orbite ) une solution d'une edo.
- 4- Une solution maximale est une solution définie sur un intervalle ouvert de temps non prolongeable en dehors de cet intervalle.
- 5- On appelle portrait de phase l'ensemble des trajectoires. Dans la pratique on oriente les trajectoires suivant le sens croissant du "temps"  $t$ .

Une conséquence importante du théorème de Cauchy-Lipschitz est que deux trajectoires telles que  $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$  n'ont pas de points commun ou encore si elles ont un point commun elles sont confondues.

En filigrane de ce cours, on abordera les notions d'équilibre et de stabilité.

**Définition 2.** Un point  $x^*$  sur une trajectoire de l'équation  $\dot{x} = f(x)$  est un point d'équilibre si

$$f(x^*) = 0.$$

Si  $x^*$  est dit régulier.

La vitesse d'une trajectoire n'est pas nulle en un point régulier et le vecteur  $\dot{x}^*$  est tangent à la trajectoire. Par contre si le point  $x^*$  est un point d'équilibre la vitesse de la trajectoire est nulle en  $x^*$ . La question centrale qui se pose est le comportement de la trajectoire au voisinage d'un point d'équilibre  $x^*$ . En gros les points d'équilibre d'une edo détermine en partie la géométrie des trajectoires. Est-ce que les trajectoires sont attirées ou repoussées par le point  $x^*$ ? On introduit la notion de stabilité pour décrire cette situation.

**Définition 3.** Soit  $x^*$  un point d'équilibre de  $\dot{x} = f(x)$ .

1-  $x^*$  est stable si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \|x_0 - x^*\| \leq \eta \Rightarrow \forall t > t_0, \|x(t) - x_0\| \leq \epsilon,$$

où  $x(t_0) = x_0$ .

2-  $x^*$  est attractif si et seulement si

$$\exists \eta > 0, \|x_0 - x^*\| \leq \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$$

où  $x(t_0) = x_0$ .

3-  $x^*$  est répulsif si et seulement si

$$\exists \eta > 0, \|x_0 - x^*\| \leq \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x^*,$$

où  $x(t_0) = x_0$ .

4-  $x^*$  est asymptotiquement stable si et seulement si  $x^*$  est stable et attractif.

5-  $x^*$  est instable si et seulement si  $x^*$  n'est pas stable.

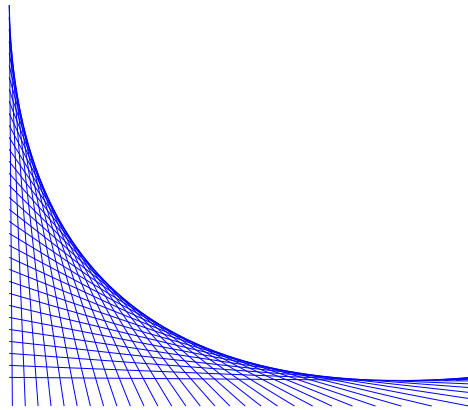
## 1.3 Exemples historiques

### 1.3.1 Enveloppe d'une famille de droites

(Leibnitz, Johann Bernoulli.) On considère une famille de droites d'équation

$$y = x(1 - 13/t) + 13 - t, \quad t > 0.$$

Cette famille de droites engendre une courbe dénommée enveloppe qui a la propriété d'être tangente à chacune des droites ci-dessus. Le problème est de déterminer l'équation de cette enveloppe.



En un point  $(x, y)$  de l'enveloppe on a  $y = x(1 - 13/t) + 13 - t$ . De plus en dérivant cette équation par rapport à  $t$  on doit avoir  $\dot{y} = \dot{x}(1 - 13/t) - 1 + 13x/t^2$ . Par définition de l'enveloppe le vecteur  $(\dot{x}, \dot{y})$  est orthogonal à la droite d'équation  $y = x(1 - 13/t) - 1 + 13x/t^2$  on a

$$\dot{y} = \dot{x}(1 - 13/t).$$

Donc la condition satisfaite par les points de l'enveloppe est

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0. \quad (1.3.8)$$

On obtient alors

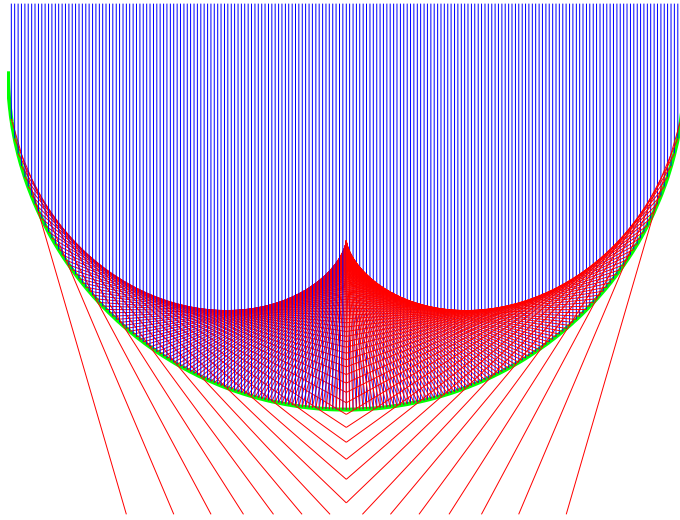
$$t = \sqrt{13x}.$$

On en déduit que l'enveloppe est une parabole d'équation :

$$(y - x - 13)^2 = 52x.$$

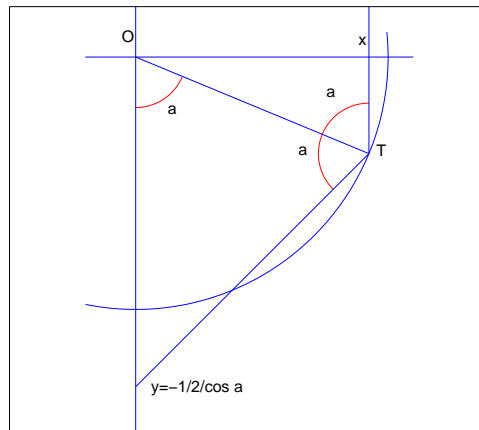
### 1.3.2 Caustique du cercle unité

(Johann Bernoulli.) On considère des rayons lumineux parallèles réfléchis par le cercle  $x^2 + y^2 = 1$ . Les rayons réfléchis sont des droites qui engendrent une enveloppe dénommée caustique.



Pour déterminer l'équation de cette caustique on calcule l'équation des rayons réfléchis. En s'appuyant sur la figure ci-dessus on observe que la pente d'un rayon réfléchi est  $\tan(2a - \pi/2)$ . De plus un rayon réfléchi intersecte l'axe des  $y$  au point d'ordonnée  $-\frac{1}{\cos 2a}$ . L'équation d'un rayon réfléchi est donc

$$y = -\frac{\cos 2a}{\sin 2a}x - \frac{1}{2 \cos a}.$$





La condition 1.3.8  $\frac{\partial y}{\partial a} = 0$  donne

$$-\frac{\sin a}{2 \cos^2 a} + \frac{x}{2 \cos^2 a \sin^2 a} = 0.$$

Donc  $x = \sin^3 a$ . En insérant cette condition dans l'équation d'un rayon réfléchi on obtient pour l'équation de la caustique

$$y = -\sqrt{1 - x^{2/3}} \left( \frac{1}{2} + x^{2/3} \right).$$

s

### 1.3.3 Courbure

(Newton.) Soit  $y = f(x)$  et un point  $(a, f(a))$ . On veut déterminer le cercle approchant le mieux la courbe  $(x, f(x))$  au voisinage de  $(a, f(a))$ . Ce cercle est appelé le cercle osculateur, son centre est le centre de courbure et l'inverse de son rayon est la courbure. En fait le lieu des centres de courbure est l'enveloppe de la famille de droites d'équation

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Cette famille de droites est celle des normales à la courbe  $(x, f(x))$  quand  $a$  varie. Pour déterminer l'équation de l'enveloppe on résoud

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0$$

c'est à dire

$$f'(a) + \frac{f''(a)}{f'(a)^2}(x - a) + \frac{1}{f'(a)} = 0.$$

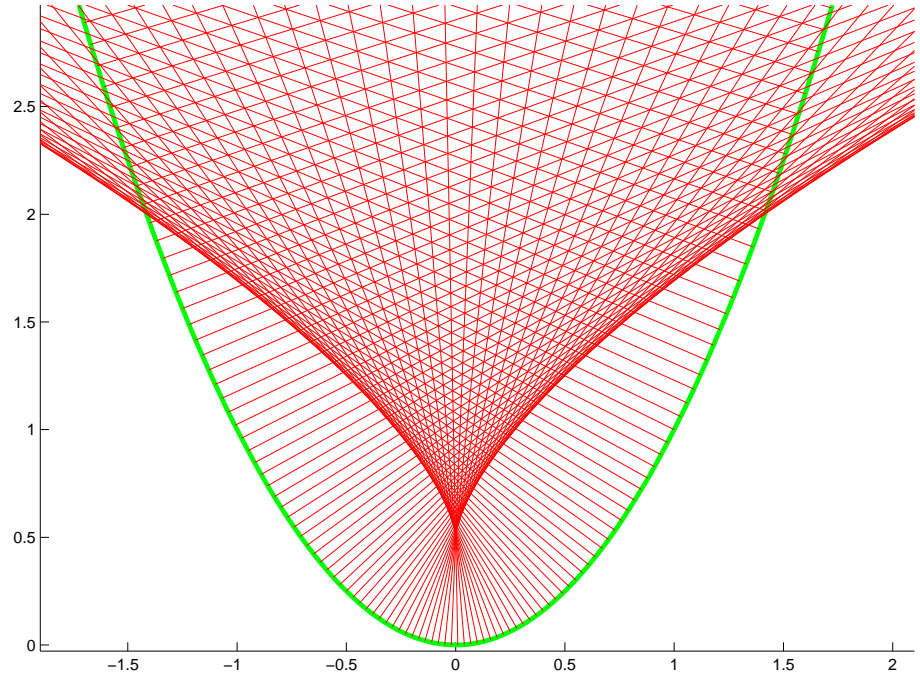
Les coordonnées du centre de courbure sont donc

$$\left( a - \frac{(1 + f'(a)^2)f'(a)}{f''(a)}, \quad f(a) + \frac{1 + f'(a)^2}{f''(a)} \right).$$

L'expression de la courbure est

$$\left| \frac{f''(a)}{(1 + f'(a)^2)^{3/2}} \right|.$$

On illustre ci-dessous la développée de la parabole  $y = x^2$ .



### 1.3.4 Isochrone de Leibnitz

Il s'agit de déterminer une courbe  $(x, f(x))$  telle si un corps de masse ponctuelle  $m = 1$  glisse sur cette courbe, sa vitesse verticale soit égale à une constante  $v > 0$ . On oriente l'axe des  $y$  vers le bas. On suppose sans perte de généralité qu'à l'instant  $t = 0$  la masse est à l'origine et que  $\dot{x}(0) = 0$  et  $\dot{y}(0) = v$ . Suivant le principe de conservation de l'énergie on a

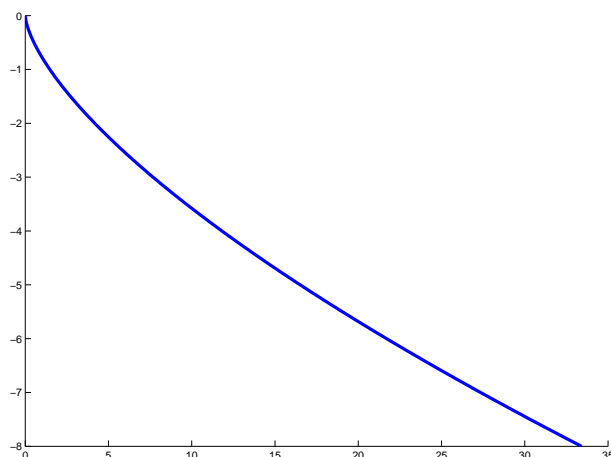
$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2 + 2gy.$$

Donc  $\dot{x} = \sqrt{2gy}$ . Puisque  $y = vt$ , il vient

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{2gvt^3}.$$

Donc l'équation de l'isochrone de Leibniz est

$$9x^2 + 8gy^3/v^2 = 0.$$



### 1.3.5 La tractrice

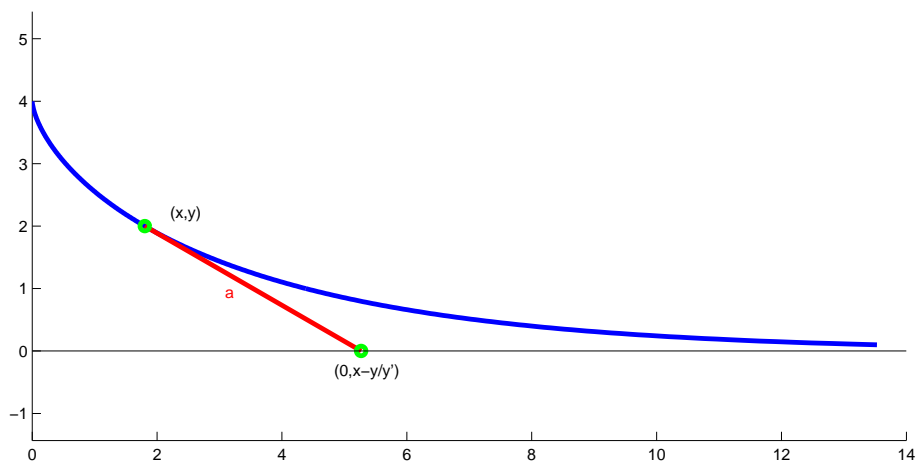
(Leibnitz.) C'est la courbe qui est définie de la façon suivante. On considère la tangente en point  $M$  quelconque de cette courbe. Soit  $A$  le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des  $x$ . La propriété qui définit la courbe est que la longueur du segment  $AM$  est une constante  $a$ .

Soit  $(x, y)$  les coordonnées du point  $M$  de cette courbe. Alors la tangente en  $(x, y)$  coupe l'axe des  $x$  en  $(x_0, 0)$  avec  $x_0 = x - y/y'$ . Donc la condition  $(x - x_0)^2 + y^2 = a^2$  devient

$$y'^2 = \frac{y^2}{a^2 - y^2}.$$

En intégrant on trouve

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} - a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$



### 1.3.6 La chaînette

(Bernoulli.) Il s'agit de déterminer la courbe d'un cable soumis à son propre poids et suspendu à deux extrémités. On note par :

- 1-  $W(x)$  le poids du segment de cable  $OP$  appliqué à son centre de masse  $Q$ .
- 2-  $T(x)$  la tension du cable en  $P$ .
- 3-  $H$  la tension du cable en  $O$ .
- 4-  $\theta(x)$  l'angle entre  $T(x)$  et l'axe des  $x$ .
- 5-  $\rho$  la masse par unité de longueur.

À l'équilibre on a :

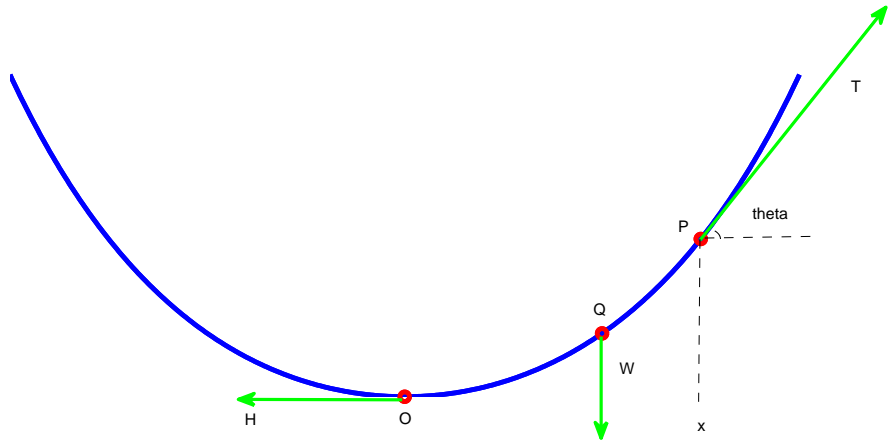
$$T \sin \theta = W, \quad T \cos \theta = H.$$

La tension est tangente à la chaînette. Donc  $\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{W}{H}$ . D'autre part  $dW = \rho ds$  où  $s$  est l'abscisse curviligne. Donc  $W'(x) = \rho \sqrt{1 + y'(x)^2}$  où  $'$  désigne la dérivée par rapport à  $x$ . Il s'ensuit en dérivant

$$y''(x) = \frac{1}{H} W'(x) = \frac{1}{H} \sqrt{1 + y'(x)^2}.$$

Puisque  $y(0) = y'(0) = 0$  on trouve en intégrant

$$y(x) = \frac{H}{\rho} \cosh \frac{\rho x}{H}.$$



### 1.3.7 Le brachistochrone

(Bernoulli.) Il s'agit de déterminer une courbe plane sur laquelle un point matériel pesant placé dans un champ de pesanteur uniforme, glissant sans frottement et sans vitesse initiale, présente un temps de parcours minimal parmi toutes les courbes joignant deux points fixés. On considère sans perte de généralité que la masse du point est égale à 1. Soit  $(x, y)$  un point sur la courbe solution et  $'$  désigne la dérivée par rapport à  $x$ . Si  $s$  désigne l'abscisse curviligne du point on a  $s' = \sqrt{1 + y'^2}$  et  $\dot{s} = \sqrt{-2gy}$ . Donc

$$dt = \sqrt{-\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx$$

Par définition, il s'agit de trouver parmi toutes les fonctions  $y := y(x)$  celle qui minimise  $\int_{x_0}^{x_1} dt$ , i.e,

$$\int_{x_0}^{x_1} L(y, y') dx := \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{-\frac{1+y'^2}{2gy}} dx.$$

On montre que  $y$  vérifie l'équation de Beltrami

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = C$$

où  $C$  est une constante. C'est à dire

$$\sqrt{-\frac{1+y'^2}{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{-2gy(1+y'^2)}} = C.$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{-2gy(1+y'^2)}} = C.$$

Ce qui est équivalent à

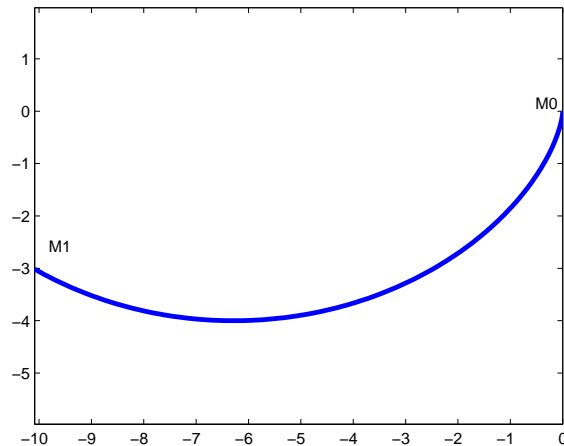
$$y(1+y'^2) = A,$$

où  $A$  est une constante négative. On en déduit que

$$dx = \sqrt{\frac{y}{A-y}} dy.$$

Le changement de variable  $y = A \sin^2 t$  montre que

$$x - x(0) = At - \frac{A}{2} \sin 2t.$$



### 1.3.8 Quelques équations différentielles classiques.

**Équations à variables séparées.**  $\dot{x} = f(t)g(x)$ .

On intègre

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t) dt.$$

**Équation linéaire non homogène.**  $\dot{x} = f(t)x + g(t)$ .

On cherche  $x$  sous la forme :  $x(t) = u(t)v(t)$ . On obtient

$$\dot{u}v + \dot{v}u = fuv + g.$$

Pour obtenir  $u$  on résoud :

$$\dot{u} = fu.$$

Alors  $u(t) = e^{\int_0^t f(t)dt}$ . Ce qui permet d'obtenir  $v$  en résolvant :

$$\dot{v} = g/u.$$

Donc

$$x(t) = \left( C + \int_0^t \frac{g(t)}{u(t)} dt \right) u(t).$$

**Équation différentielle de Bernoulli.**  $\dot{x} = fx + gx^n$ .

On pose  $x = uv$  et on se ramène au cas précédent. L'équation  $\dot{v} = gu^{n-1}v^{n-1}$  est à variables séparées.

**Équation de Riccati.**  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ .

On cherche  $p$  tel que  $\dot{x} = p(x)$ . La règle de dérivation d'une fonction composée donne

$$\ddot{x} = p'(x)p(x).$$

On résoud alors

$$p'(x)p(x) = f(x, p(x))$$

puis  $\dot{x} = p(x)$ .

## Chapitre 2

# Équations différentielles à coefficients constants

### 2.1 Résolution

Le modèle le plus simple est

$$\dot{x} = ax \quad (2.1.1)$$

où  $a \in \mathbb{R}$ . on vérifie que  $x(t) = x_0 e^{at}$  est une solution de cette équation. D'autre part les seules solutions sont de cette forme. En effet considérons une solution  $z(t)$  et montrons que  $z(t)$  s'écrit sous la forme  $z_0 e^{at}$ . Pour cela montrons que  $z(t)e^{-at}$  est constant. On obtient en dérivant :

$$\frac{d}{dt}(z(t)e^{-at}) = \dot{z}(t)e^{-at} - z(t)ae^{-at} = az(t)e^{-at} - az(t)e^{-at} = 0.$$

Donc  $z(t)e^{-at}$  est constant.

**L'ensemble des solutions de 2.1.1 est un espace vectoriel de dimension un.**

On généralise 2.1.1 en considérant

$$\dot{x} = Ax \quad (2.1.2)$$

où  $A$  est une matrice réelle de taille  $n \times n$ . On cherche une fonction définie de  $[a_0, a_1] \in \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$  solution de 2.1.1.

Dans le cas particulier d'une matrice diagonale  $A = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  on vérifie facilement que  $x(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})x_0$  est une solution pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . On note

$$e^{\Lambda t} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$$

par analogie au cas précédent.

Dans le cas général on observe que si  $u$  est un vecteur propre associé à une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  alors  $x(t) = e^{\lambda t}u$  est une solution de 2.1.2. En effet

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}u = e^{\lambda t}Au = Ax(t).$$

Les valeurs propres d'une matrice réelle pouvant être complexes, on va établir que :

**Théorème 2.** Soit  $A$  une matrice complexe de taille  $n \times n$ . Les seules solutions de 2.1.2 sont de la forme

$$e^{At}x_0$$

où  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et

$$e^{At} = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} t^k.$$

On dit que  $e^{At}$  est l'exponentielle de la matrice  $At$ .

Étudions les propriétés de l'exponentielle de matrice.

**Proposition 1.** 1- La fonction  $t \rightarrow \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} t^k$  est différentiable sur  $\mathbb{R}$ .  
2- Sa dérivée est  $Ae^{At}$ .

**Proof.**

1- Soit  $\|\cdot\|$  une norme matricielle subordonnée. On a :

$$\|e^{At}\| \leq \sum_{k \geq 0} \frac{\|At\|^k}{k!} = e^{\|At\|}.$$

Donc  $\mathbb{R}$  est le domaine de convergence de la fonction

$$t \rightarrow \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} t^k.$$

Elle est donc différentiable sur  $\mathbb{R}$ .

2- C'est immédiat.

On en déduit directement que  $e^{At}x_0$  est une solution de 2.1.2.

L'exponentielle de matrice possède les propriétés de l'exponentielle classique comme l'établit la proposition suivante.

**Proposition 2.**

- 1- Si  $B = P^{-1}AP$  alors  $e^B = P^{-1}e^AP$ .
- 2- Si  $AB = BA$  alors  $e^{A+B} = e^Ae^B$ .
- 3-  $e^{-A} = (e^A)^{-1}$ .

De cette proposition on déduit que les seules solutions de 2.1.2 sont de la forme  $e^{At}x_0$ . En effet si  $z(t)$  est une solution alors

$$\frac{d}{dt}e^{-At}z(t) = -Ae^{-At}z(t) + e^{-At}\dot{z}(t) = -Ae^{-At}z(t) + e^{-At}Az(t) = 0$$

puisque  $A$  et  $e^{-At}$  commutent.

## 2.2 Comportement des solutions. Portrait de Phase

Le point fondamental est que la fonction  $x(t) = e^{\lambda t}u$  est une solution de 2.1.2 si  $u$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  de  $A$ . On en déduit :

- 1- Si  $\lambda < 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$  et la direction portée par le vecteur  $u$  est dite **stable**.
- 2- Si  $\lambda > 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$  et la direction portée par le vecteur  $u$  est dite **instable**.

On va étudier plus spécialement le comportement des solutions des systèmes différentiels plans. Soit  $A$  une matrice réelle  $2 \times 2$ . Alors on a



**Proposition 3.** *La matrice  $A$  est semblable à l'une des trois matrices réelles suivantes*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

On remarque alors que le comportement des solutions du système

$$\dot{y}(t) = T^{-1}ATy(t)$$

est identique à celles du système

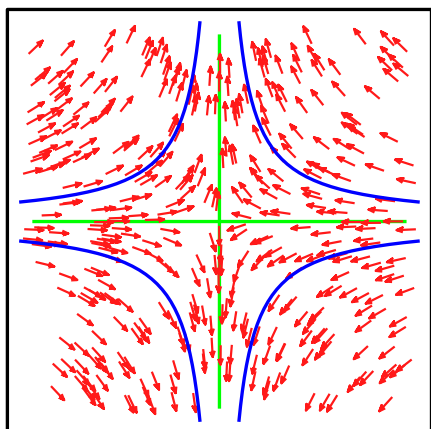
$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

si  $T^{-1}AT$  est l'une des trois formes canoniques de la proposition 3.

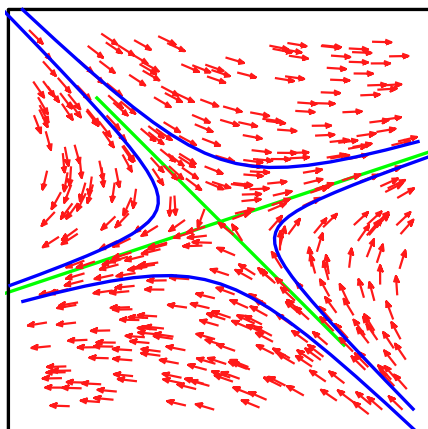
### 2.2.1 Cas des valeurs propres réelles

Dans ce cas  $A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ .

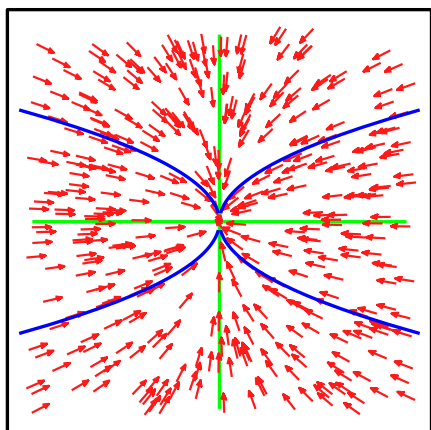
**Point selle :**  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



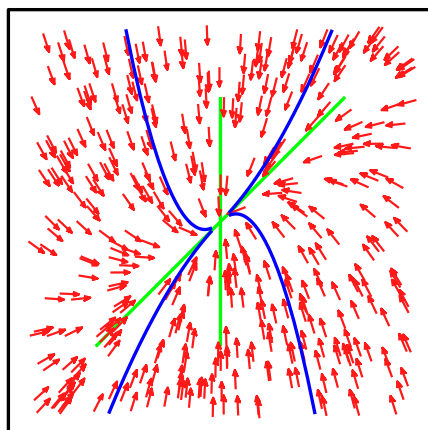
$T \rightarrow$



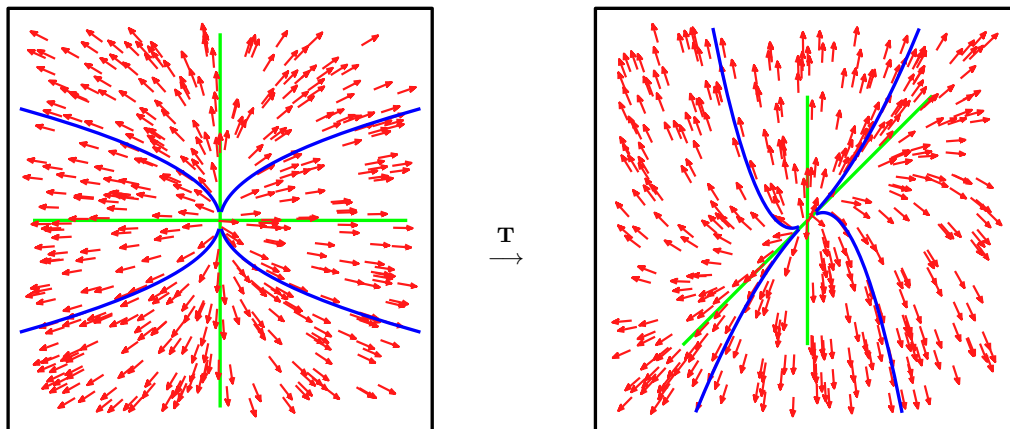
**Puits :**  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



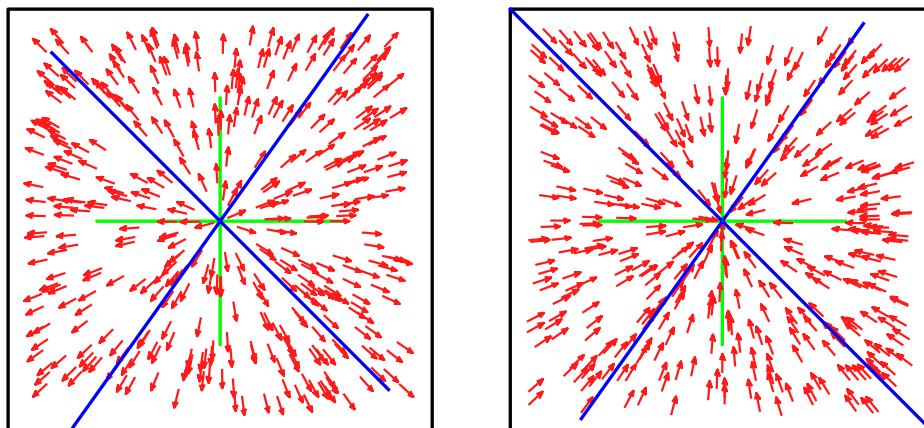
$T \rightarrow$



Source :  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$



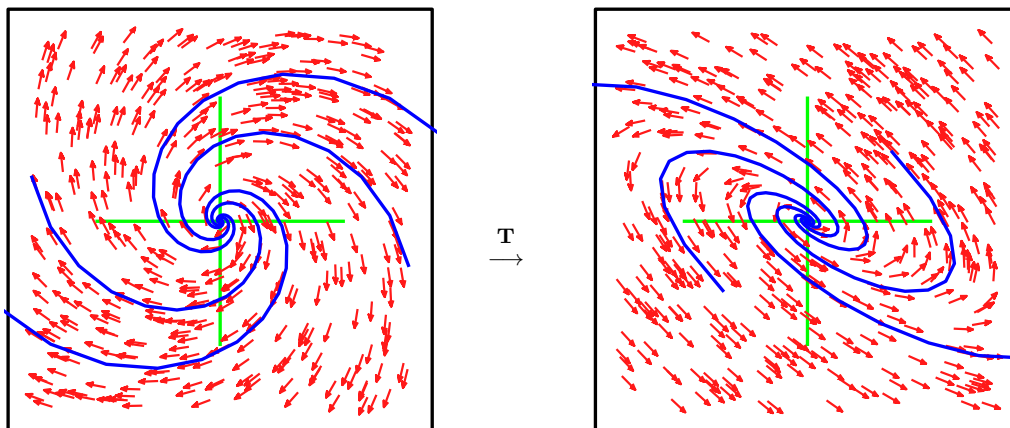
Valeurs propres réelles égales :  $0 < \lambda_1 = \lambda_2$  ou  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$



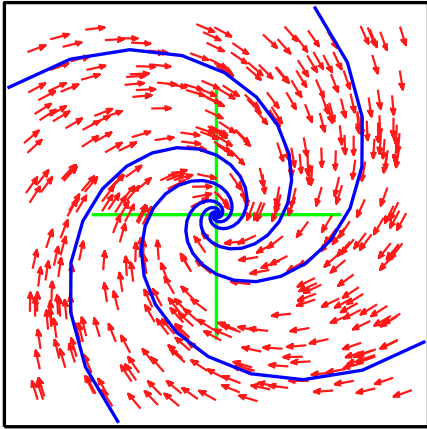
## 2.2.2 Cas des valeurs propres complexes

Dans ce cas  $A \sim \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ .

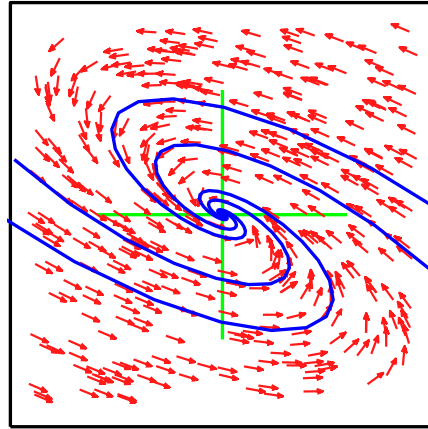
Spirale source :  $\alpha > 0$



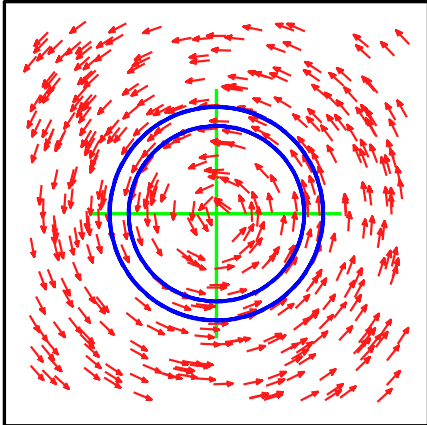
Spirale puits :  $\alpha < 0$



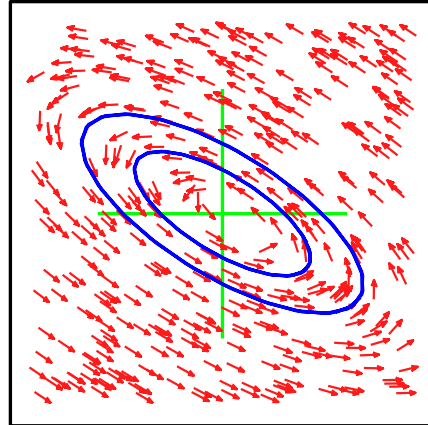
$T \rightarrow$



Centre :  $\alpha = 0$



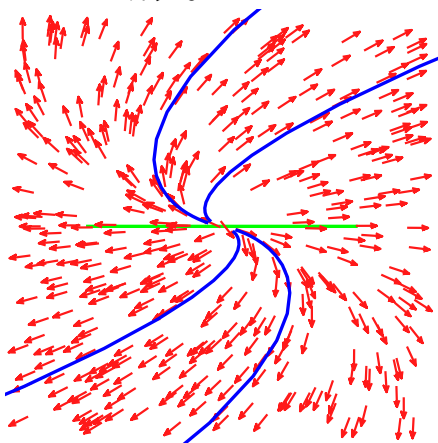
$T \rightarrow$



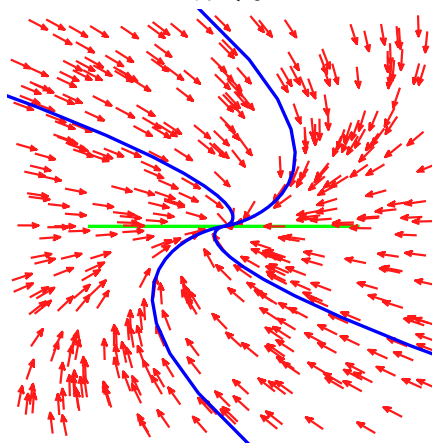
### 2.2.3 Cas nilpotent

Dans ce cas  $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ .

Source :  $\lambda > 0$



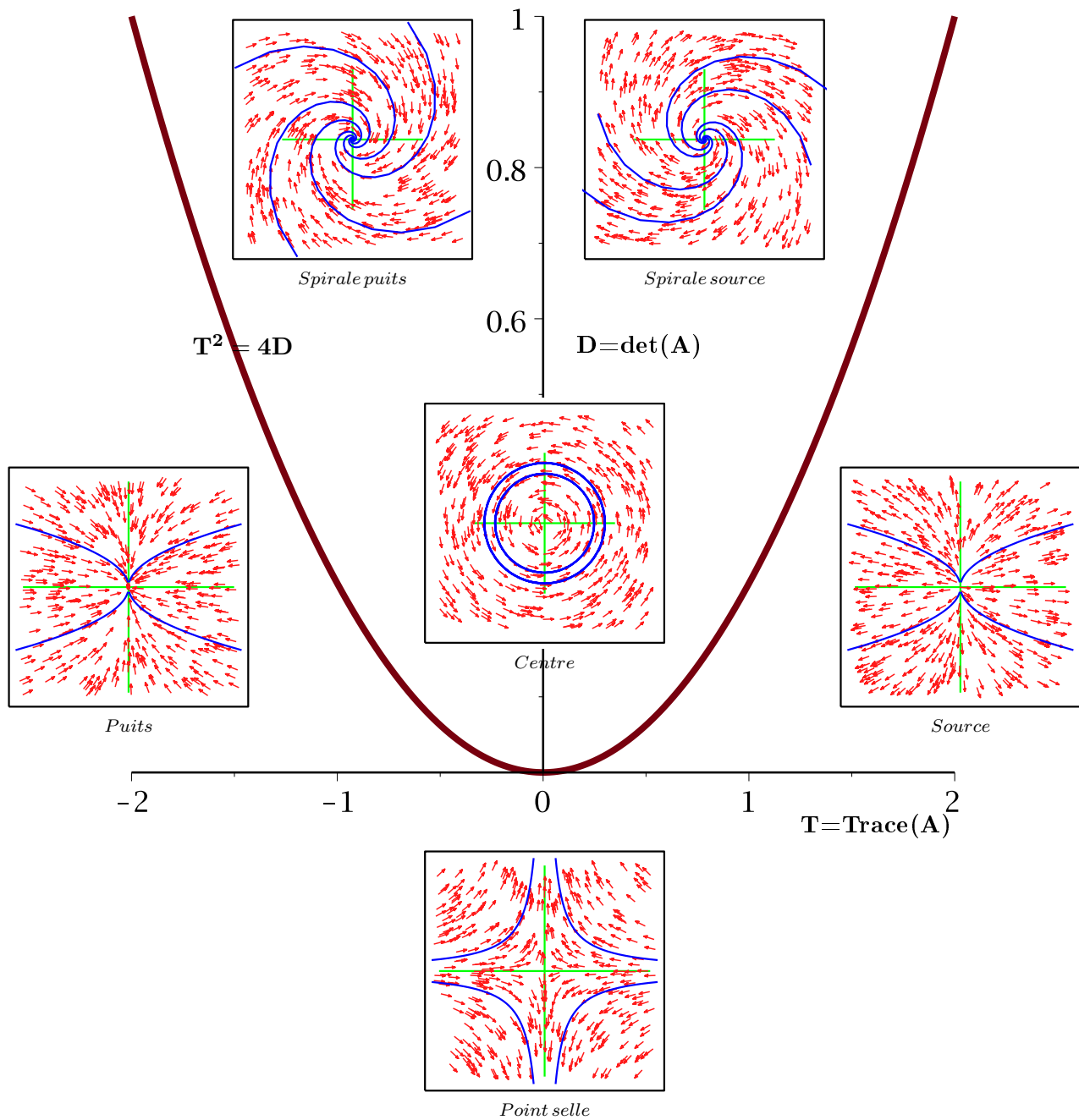
Puits :  $\lambda < 0$



### 2.2.4 Classification géométrique des portraits de phase

Soit  $A$  une matrice réelle de taille  $2 \times 2$ . Les valeurs propres de  $A$  s'écrivent à l'aide du déterminant de  $A$  ( $\det(A)$ ) et de la trace de  $A$  ( $\text{tr}(A)$ ). En notant  $D = \det(A)$  et  $T = \text{tr}(A)$  on a :

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$



### 2.2.5 Le calcul des solutions.

Le calcul des solutions est assujéti à celui de l'exponentielle d'une matrice. Le calcul formel de  $e^A$  se fait via la factorisation de  $A$  en utilisant sa forme de Jordan. On a le résultat suivant.

**Théorème 3.** *Toute matrice réelle  $A$  peut s'écrire sous la forme*

$$A = P^{-1}BP$$

avec

$$B = \begin{bmatrix} D & & & \\ & \Lambda & & \\ & & J & \\ & & & M \end{bmatrix}$$

où

1-  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ .

2-  $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_q)$  où chaque  $\Lambda_k$  est de la forme

$$\Lambda_k = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{bmatrix}$$

3-  $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_r)$  où chaque  $J_k$  est de la forme

$$J_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \alpha_k \end{bmatrix}.$$

4-  $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_s)$  où chaque  $M_k$  est de la forme

$$M_k = \begin{bmatrix} S_k & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & S_k \end{bmatrix}$$

avec

$$S_k = \begin{bmatrix} \beta_k & \delta_k \\ -\delta_k & \beta_k \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

où  $p \geq 0$ ,  $q \geq 0$ ,  $r \geq 0$  et  $s \geq 0$ . De plus les quantités  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  et  $\delta_k$  sont des nombres réels

Alors  $e^A = P^{-1}e^BP$ . Le calcul de l'exponentielle de chaque matrice intervenant sur la diagonale de  $B$  est donné par le résultat ci-dessous.

**Théorème 4.** *En reprenant les notations du théorème 3.*

1-  $e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_p t})$ .

2-  $e^{\Lambda t} = \text{diag}(e^{\Lambda_1 t}, \dots, e^{\Lambda_q t})$  où chaque  $e^{\Lambda_k t}$  est de la forme

$$e^{\Lambda_k t} = e^{a_k t} \begin{bmatrix} \cos b_k t & \sin b_k t \\ -\sin b_k t & \cos b_k t \end{bmatrix}$$

3-  $e^{J t} = \text{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_r t})$  où chaque  $e^{J_k t}$  est de la forme

$$J_k = e^{\alpha_k t} \left( I + N t + \dots + \frac{t^{r_k-1}}{(r_k-1)!} N^{r_k-1} \right)$$

avec

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

matrice nilpotente  $N^j = 0$  pour  $j \geq r_k$ .

4-  $e^{M t} = \text{diag}(e^{M_1 t}, \dots, e^{M_s t})$  où chaque  $e^{N_k t}$  est de la forme

$$e^{M_k t} = e^{\beta_k t} \text{diag} \begin{pmatrix} \cos \delta_k & \sin \delta_k \\ -\sin \delta_k & \cos \delta_k \end{pmatrix} e^{N t}$$

avec

$$N = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

matrice nilpotente  $N^j = 0$  pour  $j \geq s_k$ .

### 2.2.6 Stabilité

De la forme des solutions on voit que l'espace  $\mathbb{R}^n$  peut se décomposer en somme directe de trois sortes de sous-espaces invariants.

- 1- sous-espaces **stables** : ceux qui sont associés à une valeur propre dont la partie réelle est négative. Les trajectoires sont **asymptotiquement stables** et si le sous-espace est de dimension 2 les trajectoires restreintes à ce sous-espace sont des spirales logarithmiques. Si le sous-espace est de dimension 1 les trajectoires tendent vers l'origine. Idem le sous-espace est de dimension  $p$  ou  $2p$  (valeur propres multiples).
- 2- sous-espaces **centraux** : ceux qui sont associés à une valeur propre dont la partie réelle est nulle. Si le sous-espace est de dimension 1 tous les points de ce sous-espace sont immobiles. Si le sous-espace est de dimension 2 les trajectoires restreintes à ce sous-espace sont des cercles. Si le sous-espace est de dimension  $p$  (0 de multiplicité  $p > 1$ ), l'origine est instable. Idem si le sous-espace est de dimension  $2p$  ( $i\delta$  de multiplicité  $p > 1$ ).
- 3- sous-espaces **instables** : ceux qui sont associés à une valeur propre dont la partie réelle est positive. Si le sous-espace est de dimension 2 les trajectoires restreintes à ce sous-espace sont des spirales logarithmiques. Si le sous-espace est de dimension 1 les trajectoires tendent vers l'infini. Idem si la dimension du sous-espace est  $p$  ou  $2p$ ,  $p > 1$ .

## Chapitre 3

# Équations différentielles linéaires non autonomes

### 3.1 $\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$

Ici  $A$  est une matrice complexe  $n \times n$  et  $f(t)$  une fonction de  $[a_0, a_1] \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 5.** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . La fonction

$$x(t) = e^{tA} \left( x_0 + \int_0^t e^{-As} f(s) ds \right)$$

est la solution de

$$x(t) = Ax(t) + f(t) \tag{3.1.1}$$

qui vérifie  $x(0) = x_0$ .

**Preuve.** soit  $z(t)$  une solution particulière de 3.1.1. Alors si  $x(t)$  vérifie  $\dot{x} = Ax$  la fonction  $x(t) + z(t)$  est une solution de 3.1.1. déterminons  $z(t)$  tel que  $x(t) = e^{At}z(t)$  soit solution de 3.1.1. On a

$$Ax(t) + f(t) = Ae^{At}z(t) + e^{At}\dot{z}(t).$$

Donc  $\dot{z}(t) = e^{-At}f(t)$  et  $z(t) = z(0) + \int_0^t e^{-As}f(s)ds$ . De plus  $z(0) = x_0$  puisque  $x(0) = x_0$ .  $\square$

### 3.2 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$

On suppose que  $A(t)$  est continue sur l'intervalle  $[a_0, a_1]$ . Alors il existe  $M > 0$  tel que  $\|A(t)\| \leq M$  pour  $t \in [a_0, a_1]$ . L'existence et l'unicité de

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{3.2.2}$$

est donné par le théorème de Cauchy-Lipschitz qui sera démontré dans un cadre plus général. On en déduit que l'application

$$\Phi_{t_0} : x \in S \rightarrow x(t_0) \in \mathbb{C}^n$$

est un homomorphisme entre l'ensemble des solutions maximales de 3.2.2 et  $\mathbb{C}^n$ . On définit la résolvante de 3.2.2 comme l'application  $R(t, t_0) = \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}$ . On a :

$$x(t) = R(t, t_0)u$$

où  $x(t)$  est la solution de 3.2.2 telle que  $x(t_0) = u$ . Puisque  $R(t, t_0)$  est un isomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  on identifie  $R(t, t_0)$  à une matrice inversible. Les propriétés de  $R(t, t_0)$  sont données par :

**Proposition 4.**

- 1- Pour tout  $t \in [a_0, a_1]$  on a  $R(t, t) = I_n$ .
- 2-  $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$ .
- 3-  $R(t, t_0)$  est solution dans  $M_n(\mathbb{C})$  du système différentiel :

$$\dot{M}(t) = A(t)M(t).$$

**Preuve.** Montrons le 3.

$$\begin{aligned} \dot{R}(t, t_0)u &= \frac{d}{dt} (R(t, t_0)u) \\ &= \dot{x}(t) \\ &= A(t)x(t) \\ &= A(t)R(t, t_0)u. \end{aligned}$$

Puisque l'identité est vraie pour tout  $u \in \mathbb{C}^n$  on en déduit  $\dot{R}(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$ .  $\square$

Maintenant on définit le **Wronskien** d'un système de solutions  $x_1, \dots, x_n$  de 3.2.2 comme le déterminant

$$W(t) = \det(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Puisque  $x_i(t) = R(t, t_0)u_i$  on a

$$W(t) = \det(R(t, t_0)) \times \det(u_1, \dots, u_n).$$

**Proposition 5.** Soit  $\Delta(t) = \det(R(t, t_0))$ . Alors

$$\dot{\Delta}(t) = \text{trace}(A(t))\Delta(t).$$

De plus

$$W(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{trace}(A(s))ds} \det(u_1, \dots, u_n).$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \Delta(t+h) &= \det(R(t+h, t_0)) \\ &= \det(R(t+h, t)) \times \det(R(t, t_0)) \\ &= \det(R(t+h, t))\Delta(t). \end{aligned}$$

La formule de Taylor montre que

$$\begin{aligned} R(t+h, t) &= R(t, t) + \dot{R}(t, t)h + o(h) \\ &= I_n + A(t)h + o(h) \end{aligned}$$

Donc

$$\det(R(t+h, t)) = \det(I_n + hA(t) + o(h)).$$

Un calcul direct montre que

$$\det(I_n + hA(t)) = 1 + \text{trace}(A(t))h + o(h).$$



Donc

$$\det(R(t+h, t_0)) = \Delta(t) + \text{trace}(A(t))\Delta(t)h + o(h).$$

On en déduit

$$\dot{\Delta}(t) = \text{trace}(A(t))\Delta(t).$$

De plus  $\Delta(t_0) = \det(R(t_0, t_0)) = 1$ . Il s'ensuit :

$$\det(R(t, t_0)) = \Delta(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{trace}(A(s))ds}.$$

En définitive :

$$W(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{trace}(A(s))ds} \det(u_1, \dots, u_n). \quad \square$$



## Chapitre 4

# Équations différentielles non linéaires

### 4.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

On aborde le cas général de la résolution de

$$\dot{x} = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.1.1)$$

On va établir le

**Théorème 6.** Soit  $f(t, x)$  une fonction continue définie de  $[a, b] \times U$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que la fonction  $f(t, x)$  est lipschitzienne par rapport à  $x$  sur  $[a, b] \times U$ , c'est à dire pour tout  $t \in [a, b]$  et  $u_1, u_2$  dans  $U$  il existe une constante  $L$  telle que :

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|. \quad (4.1.2)$$

Soient  $t_0 \in ]a, b[$  et  $x_0 \in U$ . Alors il existe  $c > 0$  tel que le problème de Cauchy

$$x(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

a une solution  $x(t)$  unique définie de  $]t_0 - c, t_0 + c[$  dans  $U$ .

Il y a plusieurs démonstrations de ce résultat. Celle que l'on présente est basée sur un théorème de point fixe.

**Théorème 7.** Soit  $K$  un ensemble fermé non vide d'un espace de Banach  $E$ . Soit  $T$  un opérateur défini sur  $K$  tel que  $T(K) \subset K$ . On suppose que  $T$  est une contraction sur  $K$ , i.e il existe une constante  $q$ ,  $0 \leq q < 1$  tel que

$$\forall x, y \in K, \quad \|T(x) - T(y)\| \leq q\|x - y\|.$$

Alors l'équation  $T(x) = x$  a une unique solution  $\bar{x}$  dans  $K$ . De plus si  $x_0 \in K$  alors la suite  $(x_n)$  définie par

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n \geq 0$$

converge vers  $\bar{x}$ . De plus

$$\|x_n - \bar{x}\| \leq \frac{q^n}{1 - q} \|x_1 - x_0\|, \quad n \geq 0.$$

**Preuve du théorème 6**

On applique ce théorème pour montrer l'existence d'une solution au problème de Cauchy 4.1.1. Soit  $r > 0$  tel que la boule fermée  $\bar{B}(x_0, r)$  soit contenue dans  $U$ . Puisque la fonction  $f$  est continue sur  $[a, b] \times B(x_0, r)$  le maximum de  $\|f(t, x)\|$  sur  $[a, b] \times B(x_0, r)$  est fini. On le note par  $M$ .

On considère alors  $c > 0$  tel que :

- 1-  $]t_0 - c, t_0 + c[ \subset [a, b]$ ,
- 2-  $Lc < 1$ ,
- 3-  $Mc \leq r$ .

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues sur  $]t_0 - c, t_0 + c[$  dans  $B(x_0, r)$  muni de la norme

$$\|x\| = \sup\{\|x(t)\| : t \in ]t_0 - c, t_0 + c[\}$$

On montre que c'est un espace de Banach.

On note par  $u_0$  la fonction définie par  $u_0(t) = x_0$  pour  $t \in ]t_0 - c, t_0 + c[$ . Alors l'opérateur  $T$  de  $E$  dans  $E$  définie par

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in ]t_0 - c, t_0 + c[$$

vérifie  $T(K) \subset K$  où  $K$  est la boule fermée de  $E$  de centre  $u_0$  et de rayon  $r$ . En effet pour tout  $x \in K$  on a

$$\begin{aligned} \|T(x)(t) - u_0(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \\ &\leq Mc \leq r. \end{aligned}$$

Donc  $\|T(x) - u_0\| \leq r$  et  $T(x) \in K$ .

Montrons maintenant que  $T$  est une contraction de rapport  $Lc < 1$ . On a pour tout  $t \in ]t_0 - c, t_0 + c[$  et pour tout  $x, y \in K$  :

$$\begin{aligned} \|T(x)(t) - T(y)(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \right| \\ &\leq L|t - t_0| \|x - y\| \\ &\leq Lc \|x - y\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\|T(x) - T(y)\| \leq Lc \|x - y\|.$$

Puisque  $T(K) \subset K$  et que  $T$  est une contraction, les hypothèses du théorème de point fixe 7 sont réalisées : on en déduit l'existence d'un unique point fixe  $x$  pour l'opérateur  $T$  dans  $B(u_0, r)$ . La suite de fonctions  $u_k(t)$ ,  $t \in ]t_0 - c, t_0 + c[$ , définie par

$$u_0(t) = x_0, u_{k+1} = T(u_k)$$

converge vers une fonction  $x(t)$  vérifiant

$$T(x)(t) = x(t)$$

pour  $t \in ]t_0 - c, t_0 + c[$ . Donc  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  et  $x(t_0) = x_0$ . Donc  $x(t)$  est solution de 4.1.1. Elle est l'unique solution d'après le théorème de point fixe 7.  $\square$

---

1. Attention : on utilise la même notation pour les normes dans  $\mathbb{R}^n$  et dans  $E$ . Ainsi  $\|x(t)\|$  est la norme dans  $\mathbb{R}^n$  de  $x(t)$  et  $\|x\|$  la norme de la fonction  $x$  dans  $E$ .

## 4.2 Remarques et prolongements

Une première remarque sur le caractère lipschitzien de la fonction  $f$  dans le théorème 6. L'edo

$$\dot{x} = 2\sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0$$

admet une infinité de solution qui se coupent en  $(t, x) = (0, 0)$ . La fonction  $f(x) = \sqrt{|x|}$  n'est pas lipschitz en 0.

De plus une edo peut avoir une solution unique sans que  $f$  soit lipschitzienne. Par exemple

$$\dot{x} = 1 + 1_{\mathbb{R}_+}(x), \quad x(t_0) = x_0,$$

où  $1_{\mathbb{R}_+}$  est la fonction caractéristique de  $\mathbb{R}_+$ .

Le mouvement d'un point matériel  $M$  appartenant à un cercle qui roule sans glisser sur une droite horizontale fournit un exemple d'edo où le second membre est une fonction continue mais non lipschitz. En fait le point  $M$  se déplace sur une cycloïde. Le cercle peut s'arrêter pour une durée indéterminée quand le point  $M$  est sur la droite horizontale puis repartir à nouveau. Ceci conduit à une infinité de trajectoires pour le point  $M$ .



## Chapitre 5

# Solutions maximales, Flots

Dans tout ce chapitre on considère une EDO

$$\dot{x} = f(x)$$

où  $f$  définie d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est Lipschitz de constante  $L$ .

### 5.1 Continuité des solutions par rapport aux conditions initiales

**Théorème 8.** Soient  $x(t)$  et  $y(t)$  deux solutions de  $\dot{x} = f(x)$  sur  $[t_0, t_1]$ . Alors pour tout  $t \in [t_0, t_1]$  on a

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| e^{L(t-t_0)}.$$

La preuve dépend d'un lemme célèbre : le lemme de Gronwall.

**Lemme 1.** Soit  $u : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et positive. Soient  $c \geq 0$  et  $G \geq 0$  tels que

$$u(t) \leq c + \int_0^t Gu(s)ds$$

pour tout  $t \in [0, a]$ . Alors

$$u(t) \leq ce^{Gt}$$

pour tout  $t \in [0, a]$ .

**Preuve.** Supposons  $C > 0$  et introduisons  $v(t) = c + \int_0^t Gu(s)ds > 0$ . Alors  $u(t) \leq v(t)$ . Majorons  $v(t)$ . On a  $v'(t) = Gu(t) \leq Gv(t)$ . Donc

$$\frac{d}{dt} \log(v(t)) \leq G$$

et

$$\log(v(t)) \leq \log(v(0)) + Gt.$$

Il s'ensuit puisque  $v(0) = c$  que  $v(t) \leq ce^{Gt}$ .

Maintenant si  $c = 0$  on considère  $c_k = 1/k$ . On a  $u(t) \leq e^{Gt}/k$  pour tout  $k > 0$ . En faisant tendre  $k$  vers l'infini, on obtient  $u(t) = 0$ .  $\square$

**Preuve du théorème.** On pose  $v(t) = \|x(t) - y(t)\|$ . Alors

$$x(t) - y(t) = x(t_0) - y(t_0) + \int_{t_0}^t (f(x(s)) - f(y(s)))ds.$$

Une application du lemme de Gronwall donne le résultat.  $\square$

## 5.2 Solutions maximales, solutions globales

Les solutions de  $\dot{x} = 1 + x^2$  sont du type  $x(t) = tg(t - c)$  et les solutions sont définies sur  $]c - \pi/2, c + \pi/2[$ . On ne peut pas les prolonger en dehors de cet intervalle.

On précise dans la suite ces notions de solution maximales et globales.

**Définition 4.** Soient deux solutions  $x_1$  et  $x_2$  définies de  $I_1$  dans  $U$  et  $I_2$  dans  $U$ . On dit que  $x_2$  est un prolongement de  $x_1$  si  $I_1 \subset I_2$  et la restriction de  $x_2$  à  $I_1$  est égale à  $x_1$ .

**Définition 5.** Une solution est maximale sur un intervalle  $I$  si elle n'admet aucun prolongement.

**Définition 6.** Une solution est globale sur un intervalle  $I$  si elle est définie sur  $I$ .

Toute solution globale est maximale mais la réciproque est fausse.

**Exemple.**

Soit  $x' = x^2$ .

1-  $x = 0$  est solution globale sur  $\mathbb{R}$ .

2- Il y a deux solution maximales qui ne sont pas globales sur  $\mathbb{R}$  :  $x(t) = \frac{-1}{t+c}$  sur  $] -\infty, -c[$  pour  $c \geq 0$  et  $x(t) = \frac{-1}{t+c}$  sur  $] -c, +\infty[$  pour  $c \leq 0$ .

**Lemme 2.** Supposons que deux solutions  $x(t)$  et  $y(t)$  de  $\dot{x} = f(x)$  sont définies sur un intervalle  $I$  contenant  $t_0$  et vérifient  $x(t_0) = y(t_0)$ . Alors  $x(t) = y(t)$  pour tout  $t \in I$ .

**Preuve.** Le théorème de Cauchy dit que les fonctions  $x$  et  $y$  sont égales sur un certain intervalle autour de  $t_0$ . Soit  $J_0$  un tel intervalle. Si  $J_0$  n'est pas égal à  $I$  et  $J_0 \subset I$  alors si  $T_1 = \sup J_0$  (resp.  $t_1 = \inf J_0$ ) on a par continuité  $x(T_1) = y(T_1)$  (resp.  $x(t_1) = y(t_1)$ ). Il existe donc deux intervalles  $J_1$  et  $J_2$  sur lesquels  $x(t) = y(t)$ . On construit ainsi une suite d'intervalles ouverts  $J_k$  tels que  $x(t) = y(t)$  sur l'ouvert  $J := \cup_k J_k$ . Cet intervalle  $J$  est le plus grand intervalle ouvert sur lequel  $x(t) = y(t)$ . Alors  $I \subset J$ . Sinon  $S = \sup J \in I$  (resp.  $s = \inf J$ ) et il existe deux intervalles ouverts  $\bar{J}_1$  et  $\bar{J}_2$  tels que  $x(t) = y(t)$  sur  $J \cup \bar{J}_1 \cup \bar{J}_2$ . Cet intervalle est plus grand que  $J$ . On a donc bien  $I \subset J$ .  $\square$

**Donc pour chaque  $x_0 \in U$  il existe un plus grand interval ouvert  $I$  contenant 0 sur lequel il existe une solution  $x(t)$  avec  $x(0) = x_0$ . On dit que  $x(t)$  est solution maximale de l'EDO sur l'intervalle  $I$ .**

Qu'arrive t-il sur les bornes de l'intervalle  $I$  ?

**Théorème 9.** Soit  $x(t)$  une solution maximale sur l'intervalle ouvert  $I = ]a, b[$  et  $b < +\infty$ . pour tout compact  $K \subset U$  il existe  $t \in ]a, b[$  tel que  $x(t) \notin K$ .

**Preuve.** Supposons que pour tout  $t \in ]a, b[$  on a  $x(t) \in K$ . La continuité de  $f$  sur  $K$  entraîne que  $\|f(x(t))\|$  est bornée par un certain  $M$ . On va montrer que  $x(t)$  peut se prolonger sur  $]a, b[$ .

**Ceci contredira le fait que  $x(t)$  est solution maximale sur  $]a, b[$ .**

On a pour tout  $a < t_0 < t_1 < b$ ,

$$\|x(t_0) - x(t_1)\| = \left\| \int_{t_0}^{t_1} x'(s) ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \|f(x(s))\| ds \leq M(t_1 - t_0).$$

Alors

$$x(b) = x(t_0) + \lim_{t \rightarrow b} \int_{t_0}^t x'(t) dt = x(t_0) + \lim_{t \rightarrow b} \int_{t_0}^t f(x(s)) ds = x(t_0) + \int_{t_0}^b f(x(s)) ds.$$

Donc  $x(t)$  est définie en  $b$  et vérifie  $x'(b) = f(x(b))$ . Ce qui implique la contradiction de maximalité de la solution  $x(t)$ .  $\square$



**Corollaire 1.** Soient  $K$  un compact inclus dans  $U$ . On suppose que toute solution du problème de Cauchy

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \in K$$

définie sur un intervalle  $[0, T]$  est contenue dans  $K$ .

Alors il existe une solution  $x(t)$  qui reste dans  $K$  sur  $[0, +\infty[$ .

**Preuve.** C'est une conséquence directe du théorème précédent. Soit  $[0, T[$  l'intervalle maximal sur lequel il y a une solution  $x(t)$ . Alors  $x([0, T]) \subset K$  et  $T$  ne peut pas être fini d'après le théorème précédent.  $\square$

### 5.3 Flots

Pour chaque  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  il existe une unique solution  $x(t)$  du problème de Cauchy telle que  $x(0) = x_0$ .

On note par  $I(x_0)$  l'intervalle maximal sur lequel est définie  $x(t)$ .

L'application  $\phi : (t, x_0) \in I(x_0) \times U \rightarrow \phi(t, x_0) = x(t)$  telle que  $x(0) = x_0$  est le flot de l'EDO  $\dot{x} = f(x)$ .

On notera  $\phi_t(x_0) = x(t)$ .

**Proposition 6.** Si les quantités  $\phi_{t+s}(x_0)$  et  $\phi_t(\phi_s(x_0))$  sont définies alors

$$\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0)).$$

**Preuve.** Supposons  $t$  et  $s$  positifs et  $\phi_s(\phi_t(x_0))$  défini. Alors  $t \in J(x_0)$  et  $s \in J(\phi_t(x_0))$ . Montrons que  $s + t \in J(x_0)$ .

On voit facilement que la fonction  $y(u) = \phi(u, x_0)$  si  $u \leq t$  et  $y(u) = \phi(u - t, \phi_t(x_0))$  si  $u \geq t$  vérifie  $y(0) = x_0$ .

Or  $\phi_{s+t}(x_0) = y(s + t) = \phi_s(\phi_t(x_0))$ .  $\square$



## Chapitre 6

# La méthode d'Euler

Il n'est pas possible de déterminer explicitement la solution générale d'une edo. Dans ce contexte les méthodes numériques permettent d'approcher la solution du problème de Cauchy. On étudie ici la méthode d'Euler dont la description est assez simple. Dans la pratique on lui préfère d'autres méthodes bien plus performantes. Leur étude est un sujet en soi et déborde l'objet de cours.

Il s'agit donc d'approcher numériquement la solution du problème de Cauchy

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

On rappelle que  $f$  est une fonction lipschitzienne définie de  $[a, b] \times U$  dans  $\mathbb{R}^n$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $h > 0$  un nombre réel donné. La méthode d'Euler consiste à définir deux suites :

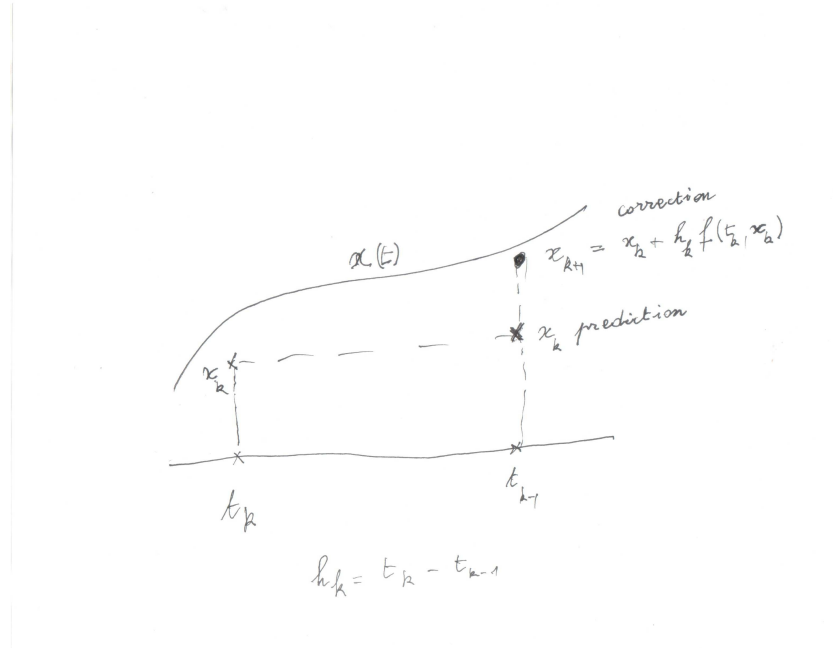
$$t_0 = a, \quad t_{k+1} = t_k + h, \quad k \geq 0 \tag{6.0.1}$$

et à définir la suite  $(x_k)$  :

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k), \quad k \geq 0. \tag{6.0.2}$$

Dans la suite on note

$$E(h, t, x) = x + hf(t, x).$$



On montre que la méthode d'Euler est convergente dans le sens suivant.

**Théorème 10.** Soit  $B(x_0, R) \subset U$  une boule qui contient la solution  $x(t)$  du problème de Cauchy

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

La fonction  $f$  est Lipschitzienne de constante  $L$  et soit  $A$  tel que  $\|f\| \leq A$  sur  $[a, b] \times B(x_0, R)$ . Pour un entier  $N > 0$  on définit  $h = \frac{b-a}{N}$  et la subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  :

$$a = t_0, \quad t_k = t_0 + kh, \quad k = 0 : N,$$

de telle sorte que  $t_N = b$ .

Pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $N > 0$  tel que

$$\|x(t_N) - x_N\| \leq \frac{e^{(b-a)L} - 1}{L} \epsilon.$$

**Preuve.** Soit  $k$  un entier donné entre 0 et  $N - 1$ . On a

$$x(t_{k+1}) - x_{k+1} = x(t_{k+1}) - E(h, t_k, x(t_k)) + E(h, t_k, x(t_k)) - x_{k+1}.$$

De sorte que

$$\|x(t_{k+1}) - x_{k+1}\| \leq \|x(t_{k+1}) - E(h, t_k, x(t_k))\| + \|E(h, t_k, x(t_k)) - x_{k+1}\|.$$

Majorons  $\|x(t_{k+1}) - E(h, t_k, x(t_k))\|$ .

$$\|x(t_{k+1}) - E(h, t_k, x(t_k))\| = \|x(t_{k+1}) - x(t_k) - hf(t_k, x(t_k))\|$$

Or il existe  $t \in ]t_k, t_{k+1}[$  tel que  $x(t_{k+1}) - x(t_k) = \dot{x}(t)(t_{k+1} - t_k) = f(t, x(t))(t_{k+1} - t_k)$ . Donc puisque  $(t, x(t)) \in [a, b] \times B(x_0, R)$  et que  $\|f(t, x(t))\| \leq A$  on a

$$\|x(t_{k+1}) - x(t_k)\| \leq Ah.$$

Or la fonction  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b] \times U$ . Donc pour  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|t - s| \leq \delta, \quad \text{et} \quad \|x - y\| \leq A\delta \Rightarrow \|f(t, x) - f(s, y)\| \leq \epsilon.$$

Donc en prenant  $h \leq \delta$  on en déduit que

$$\|x(t_{k+1}) - E(h, t_k, x(t_k))\| = h\|f(t, x(t)) - f(t_k, x(t_k))\| \leq h\epsilon.$$

Majorons maintenant  $\|E(h, t_k, x(t_k)) - x_{k+1}\|$ . On a

$$\begin{aligned} \|E(h, t_k, x(t_k)) - x_{k+1}\| &\leq \|x(t_k) - x_k + hf(t_k, x(t_k)) - hf(t_k, x_k)\| \\ &\leq \|x(t_k) - x_k\| + h\|f(t_k, x(t_k)) - hf(t_k, x_k)\| \\ &\leq (1 + hL)\|x(t_k) - x_k\|. \end{aligned}$$

Finalement puisque  $\|x(t_{k+1}) - E(h, t_k, x(t_k))\| \leq h\epsilon$  et  $\|E(h, t_k, x(t_k)) - x_{k+1}\| \leq (1 + hL)\|x(t_k) - x_k\|$  on obtient :

$$\|x(t_{k+1}) - x_{k+1}\| \leq h\epsilon + (1 + hL)\|x(t_k) - x_k\|.$$

On en déduit avec  $x(t_0) = x_0$  que :

$$\begin{aligned} \|x(t_N) - x_N\| &\leq h\epsilon + (1 + hL)\|x(t_{N-1}) - x_{N-1}\| \\ &\leq h\epsilon(1 + (1 + Lh) + \dots + (1 + Lh)^{N-1}) + (1 + Lh)^N\|x(t_0) - x_0\| \\ &\leq h\epsilon \frac{(1 + Lh)^N - 1}{1 + Lh - 1} = \frac{\epsilon}{L}((1 + Lh)^N - 1). \end{aligned}$$

Puisque  $h = (b - a)/N$  on choisit  $N$  tel que  $h \leq \delta$ . La limite de  $(1 + hL)^N$  quand  $N$  tend vers l'infini est égale à  $e^{L(b-a)} - 1$ . On en déduit

$$\|x(t_N) - x_N\| \leq \frac{e^{(b-a)L} - 1}{L} \epsilon. \quad \square$$

### Prolongement : le polygone d'Euler.

En fait la méthode d'Euler peut être utilisée pour démontrer l'existence d'une solution au problème de Cauchy.

On définit la fonction  $x_h(t)$  linéaire par morceaux définie par

$$x_h(t) = x_k + (t - t_k)f(t_k, x_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0 : N - 1. \quad (6.0.3)$$

Le polygone d'Euler est le graphe de la fonction  $x_h$ .

Quelles sont les conditions qui assurent que le polygone d'Euler reste dans l'ensemble  $[a, b] \times B(x_0, R)$  ? On va montrer que si  $h$  tend vers 0 les fonctions linéaires par morceaux  $x_h(t)$  convergent vers une solution du problème de Cauchy.

**Théorème 11.** *Soit une fonction  $f(t, x)$  bornée par  $A$  et lipschitzienne de constante  $L$  par rapport à  $x$  sur  $[a, b] \times B(x_0, R)$ . Soit  $h = (b - a)/N$  et  $a = t_0, t_k = t_0 + kh, k = 0 : N$  où  $N$  est un entier positif. Si  $b - t_0 \leq R/A$  alors on a :*

- 1- *Quand  $h$  tend vers 0, la suite  $x_h(t)$  converge uniformément vers une fonction continue  $x(t)$ .*
- 2- *La fonction  $x(t)$  est continûment différentiable sur  $[a, b]$ .*
- 3- *La fonction  $x(t)$  est l'unique solution de 1.1.6 sur  $[a, b]$  dans  $\bar{B}(x_0, R)$ .*

Commençons par prouver deux lemmes. Le premier donne les conditions pour que le polygone d'Euler reste dans  $[a, b] \times B(x_0, R)$ .

**Lemme 3.** *Supposons que  $\|f\| \leq A$  sur  $[a, b] \times B(x_0, R)$  où  $B(x_0, R) \subset U$ . Si  $b - t_0 \leq R/A$  alors la suite  $(t_k, x_k)$  donnée par 6.0.2 reste dans  $[a, b] \times B(x_0, R)$  pour tout  $k$  tel que  $t_k \leq b$ . De plus si  $\|f(t, x) - f(t_0, x_0)\| \leq \epsilon$  sur  $[a, b] \times B(x_0, R)$  on a*

$$\|x_h(t) - x_0\| \leq A|t - t_0|, \quad (6.0.4)$$

et

$$\|x_h(t) - (x_0 + (t - t_0)f(t_0, x_0))\| \leq \epsilon|t - t_0|. \quad (6.0.5)$$

**Preuve.** Soit  $N$  l'indice tel que  $t_N \leq b$  et  $t_{N+1} > b$ . On a simultanément pour chaque indice  $k = 0 : N - 1$  et  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  :

$$\begin{aligned} x_h(t) - x_0 &= x_k - x_0 + (t - t_k)f(t_k, x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k x_i - x_{i-1} + (t - t_k)f(t_k, x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k hf(t_{i-1}, x_{i-1}) + (t - t_k)f(t_k, x_k). \end{aligned}$$

Passant à la norme et utilisant que  $\|f\| \leq A$  et  $t_k - t_0 = kh$  on obtient

$$\begin{aligned} \|x_h(t) - x_0\| &\leq h \sum_{i=1}^k A + (t - t_k)A \\ &\leq (kh + t - t_k)A = (t_k - t_0 + t - t_k)A \\ &\leq A(t - t_0). \end{aligned}$$

Puisque  $A(t - t_0) \leq R$  on en déduit que  $x_h(t)$  reste dans la boule  $B(x_0, R)$ .

On remarque que  $x_k = x_0 + h \sum_{i=1}^k f(t_{i-1}, x_{i-1})$ . De la même façon que ci dessus on déduit en utilisant  $kh = t_k - t_0$  que :

$$\begin{aligned} x_h(t) - x_0 - (t - t_0)f(t_0, x_0) &= x_k + (t - t_k)f(t_k, x_k) - x_0 - (t - t_0)f(t_0, x_0) \\ &= h \sum_{i=1}^k f(t_{i-1}, x_{i-1}) + (t - t_k)f(t_k, x_k) - (t - t_0)f(t_0, x_0) \\ &= \sum_{i=1}^k h(f(t_{i-1}, x_{i-1}) - f(t_0, x_0)) \\ &\quad + (t - t_k)(f(t_k, x_k) - f(t_0, x_0)). \end{aligned}$$

Donc sous l'hypothèse  $\|f(t, x) - f(t_0, x_0)\| \leq \epsilon$  sur  $[a, b] \times B(x_0, R)$  on a :

$$\begin{aligned} \|x_h(t) - x_0 - (t - t_0)f(t_0, x_0)\| &\leq \sum_{i=1}^k h\|f(t_{i-1}, x_{i-1}) - f(t_0, x_0)\| \\ &\quad + (t - t_k)\|f(t_k, x_k) - f(t_0, x_0)\| \\ &\leq kh\epsilon + (t - t_k)\epsilon \\ &\leq (t_k - t_0 + t_k)\epsilon = (t - t_0)\epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Maintenant on se propose d'estimer la perturbation subit par  $x_h(t)$  quand  $x_0$  change.

**Lemme 4.** Soient  $z_0 \in U$  et  $z_{k+1} = z_k + hf(t_k, z_k)$ ,  $k = 0 : N - 1$ . On suppose que  $x_h(t)$  et  $z_h(t)$  sont dans  $U$ . Si  $f$  est lipschitzienne de constante  $L$  par rapport à  $x$ . Alors

$$\|x_h(t) - z_h(t)\| \leq e^{L(t-t_0)}\|x_0 - y_0\|.$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \|x_h(t) - z_h(t)\| &= \|x_k - z_k + (t - t_k)(f(t_k, x_k) - f(t_k, z_k))\| \\ &\leq (1 + L(t - t_k))\|x_k - z_k\| \\ &\leq e^{L(t-t_k)}\|x_k - z_k\|. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \|x_k - z_k\| &= \|x_{k-1} - z_{k-1} + h(f(t_{k-1}, x_{k-1}) - f(t_{k-1}, z_{k-1}))\| \\ &\leq (1 + Lh)\|x_{k-1} - z_{k-1}\| \\ &\leq e^{Lh}\|x_{k-1} - z_{k-1}\| \\ &\leq e^{Lkh}\|x_0 - z_0\| = e^{L(t_k-t_0)}\|x_0 - z_0\| \end{aligned}$$

En définitive en rassemblant les deux estimations précédentes

$$\|x_h(t) - z_h(t)\| \leq e^{L(t-t_0)}\|x_0 - z_0\|. \quad \square$$

### Preuve du théorème 11.

1— Soit  $\epsilon > 0$ . L'uniforme continuité de  $f$  sur le compact  $[a, b] \times \bar{B}(x_0, R)$  montre qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|t - s| \leq \delta \quad \text{et} \quad \|x - z\| \leq A\delta \Rightarrow \|f(t, x) - f(s, z)\| \leq \epsilon.$$

Supposons que  $h \leq \delta$ . On commence par regarder l'influence de l'ajout de nouveau point dans la subdivision de  $[a, b]$  définie par  $h$ . On définit une suite de subdivision obtenue à partir de  $h$  de la façon suivante :  $h^0 = h$  et  $h^k$  est obtenue à partir de  $h^{k-1}$  en rajoutant des nouveaux points à l'intervalle  $[t_{k-1}, t_k]$ .

L'estimation 6.0.4 appliquée respectivement aux fonctions linéaires par morceaux  $x_{h^k}(t)$  et  $x_{h^{k-1}}$  sur l'intervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  montre que

$$\|x_{h^k}(t_k) - x_h(t_k)\| \leq \epsilon(t_k - t_{k-1}).$$

De plus les subdivisions  $h^k$  et  $h^{k-1}$  coïncident sur  $[t_k, b]$ . Donc en appliquant le lemme 4 on obtient

$$\|x_{h^k}(t) - x_{h^{k-1}}(t)\| \leq e^{L(t-t_k)}\|x_{h^k}(t_k) - x_h(t_k)\| \leq e^{L(t-t_k)}\epsilon(t_k - t_{k-1}).$$

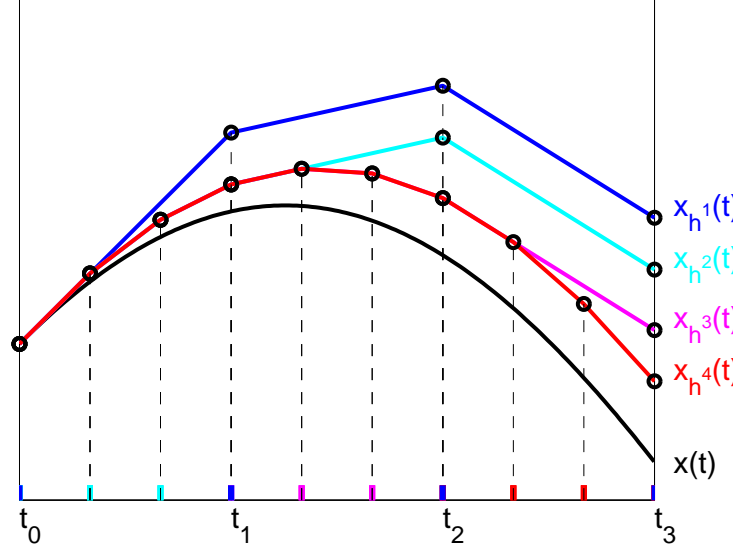
Avec la subdivision finale  $h^{N-1}$  on obtient pour  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  :

$$\begin{aligned} \|x_{h^{N-1}}(t) - x_h(t)\| &\leq \left( e^{L(t-t_1)}(t_1 - t_0) + \dots + e^{L(t-t_i)}(t_i - t_{i-1}) \right) + \epsilon(t - t_i) \\ &\leq \epsilon \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} ds = \frac{\epsilon}{L} \left( e^{L(t-t_0)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Maintenant soient deux subdivisions  $h$  et  $\bar{h}$  dont le pas est plus petit que  $\delta$ . Soit une troisième subdivision  $\tilde{h}$  un raffinement des deux premières. Alors l'estimation ci dessus implique

$$\|x_h(t) - x_{\bar{h}}(t)\| \leq 2 \frac{\epsilon}{L} \left( e^{L(t-t_0)} - 1 \right).$$

On en déduit l'uniforme convergence des fonctions linéaires par morceaux  $x_h(t)$  vers une fonction continue  $x(t)$ .



Les  $x_{h^k}(t)$  sont les fonctions linéaires par morceaux définies ci-dessus.  
La solution est  $x(t) = \cos(t - 0.7)$  sur  $[0, \pi/2 + 0.1]$ .

**2**— On montre que  $x(t)$  est continûment différentiable. Soit

$$\epsilon(\delta) = \{ \|f(t, x) - f(s, z)\| : \|t - s\| \leq \delta \text{ et } \|x - z\| \leq A\delta, (t, x), (s, z) \in [a, b] \times \bar{B}(x_0, R) \}$$

On applique l'estimation 6.0.5 en remplaçant  $(t_0, x_0)$  par  $(t, x_h(t))$  et  $t$  par  $t + \delta$ . On obtient

$$\|x_h(t + \delta) - x_h(t) - \delta f(t, x_h(t))\| \leq \epsilon(\delta)\delta.$$

On passe à la limite quand  $\|h\|$  tend vers 0 :

$$\|x(t + \delta) - x(t) - \delta f(t, x(t))\| \leq \epsilon(\delta)\delta.$$

Quand  $\delta$  tend vers 0 on a  $\epsilon(\delta)$  qui tend vers 0. Donc  $x(t)$  est différentiable et sa dérivée est  $f(x, t)$ .

**3**— Supposons que  $z(t)$  est une seconde solution de 1.1.6 sur  $[a, b] \times B(x_0, R)$ . L'uniforme continuité de  $F$  sur le compact  $[a, b] \times \bar{B}(x_0, R)$  montre qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|t - s| \leq \delta \text{ et } \|x - z\| \leq A\delta \Rightarrow \|f(t, x) - f(s, z)\| \leq \epsilon. \quad (6.0.6)$$

Soit  $h$  une subdivision tel que  $\|h\| \leq \delta$ . On considère pour  $k = 0 : N - 1$  fixé, la fonction linéaire par morceaux  $z_h^k(t)$

$$z_h^k(t) = z(t_i) + (t - t_i)f(t_i, z(t_i)), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = k : N - 1.$$

Quand  $\|h\|$  tend vers 0 alors  $z_h^0(t)$  converge vers  $x(t)$ . D'une part on a

$$z(t) = z(t_k) + \int_{t_k}^t f(s, z(s))ds.$$



D'autre part puisque  $\|h\| \leq \delta$  et que par hypothèse  $b - t_0 \leq R/A$  on a, en appliquant le l'estimation 6.0.4,  $\|z_h^k(t) - z(t_k)\| \leq A(t - t_k)$ . On déduit de 6.0.6 que  $\|f(s, z(s)) - f(t_k, z(t_k))\| \leq \epsilon$ . Alors

$$\begin{aligned} \|z(t) - z_h^k(t)\| &\leq \int_{t_k}^t \|f(s, z(s)) - f(t_k, z(t_k))\| ds \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \\ &\leq (t - t_k)\epsilon. \end{aligned}$$

En procédant comme dans la partie 1 de cette preuve il s'ensuit

$$\|z(t) - z_h(t)\| \leq \frac{\epsilon}{L} \left( e^{L(t-t_0)} - 1 \right).$$

Passant à la limite quand  $\|h\|$  et  $\epsilon$  tendent vers 0 on obtient

$$\|z(t) - x(t)\| \leq 0.$$

L'unicité de la solution est donc prouvée.  $\square$



# Chapitre 7

## Exemples

### 7.1 Dynamique des populations

Une des questions qui se pose est comment évolue le nombre d'individus d'une population. Ce problème est un vieux problème mais les premiers modèles mathématiques ont été suggéré par Malthus(1798) pour des raisons d'analyse économique.

#### 7.1.1 Le modèle logistique

Il est basé sur les deux postulats suivants

1– Si la taille d'une population est 'petite', sa croissance est proportionnelle à sa taille.

2– Une population décroît à partir d'une certaine taille.

Pendant longtemps seul le postulat 1 était considéré. Il conduit à l'edo  $\dot{x}(t) = ax(t)$ ,  $a > 0$ , où  $x(t)$  décrit la taille d'une population à l'instant  $t$ . La prise en compte du second postulat conduit à l'edo :

$$\dot{x} = ax(1 - x/N)$$

où  $a > 0$  et  $N > 0$ . Ceci conduit à l'équation dite logistique

$$\dot{x} = ax(1 - x) \tag{7.1.1}$$

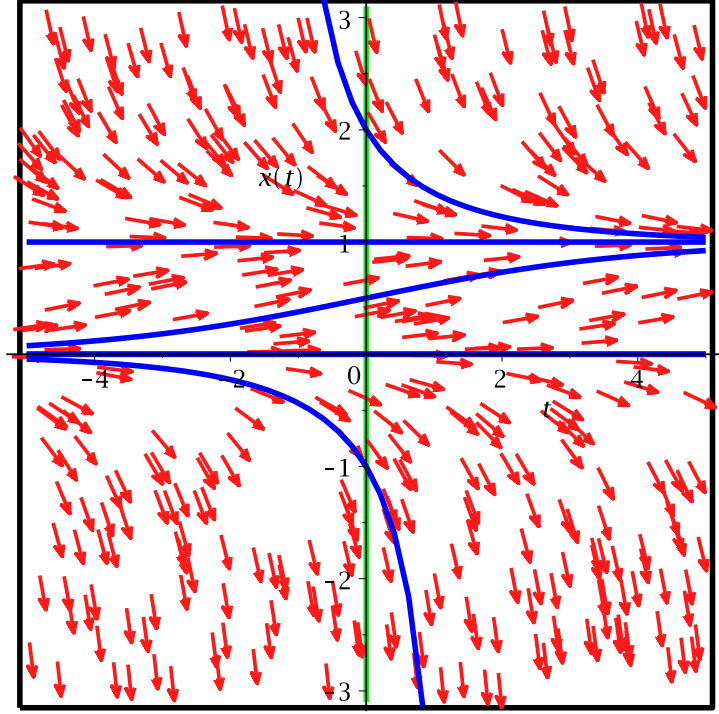
En écrivant

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int a dt$$

on trouve que

$$x(t) = \frac{Ce^{at}}{1 + Ce^{at}}$$

où  $C$  est une constante réelle. On a  $C = \frac{x_0}{1-x_0}$  où  $x_0 = x(0)$ .



On observe que 0 est une source et 1 est un puits.

### 7.1.2 Proies-Prédateurs

On note  $x(t)$  la taille des proies et  $y(t)$  la taille de prédateurs. La modélisation repose sur les postulats suivants :

- 1- En l'absence de prédateurs, les proies ont un taux de croissance constant.
- 2- En l'absence de proies, les prédateurs ont un taux de décroissance constant.
- 3- Le taux de croissance des prédateurs est proportionnel au nombre de proies.
- 4- Le taux de décroissance des proies dû aux prédateurs est proportionnel au nombre de prédateurs.

Le système différentiel guidé par ces considérations est le système dit de Lokta-Volterra :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)(a - by(t)) \\ \dot{y}(t) &= y(t)(-c + dx(t)) \\ x(0) &= x_0 > 0, \quad y(0) = y_0 > 0.\end{aligned}$$

où  $a, b, c, d, x_0$  et  $y_0$  sont des réels positifs. En fait on normalise ce système en posant  $x := dx$  et  $y := by$ . On obtient :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t) - x(t)y(t) \\ \dot{y}(t) &= -cy(t) + x(t)y(t) \\ x(0) &= x_0 > 0, \quad y(0) = y_0 > 0.\end{aligned}\tag{7.1.2}$$

C'est ce système que nous allons étudier. Du théorème de Cauchy-Lipschitz découle l'existence et l'unicité d'une solution du système 7.1.2 sur un certain intervalle  $[0, T]$ . On emploiera

également le terme trajectoire pour solution.

En fait on va montrer qu'il existe une solution sur  $[0, +\infty[$ . Pour ce faire on va montrer qu'il existe une fonction  $H(x, y)$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  telle que une solution de 7.1.2 vérifie

$$H(x(t), y(t)) = H(x_0, y_0).$$

C'est à dire qu'une solution de 7.1.2 est une courbe de niveau de la fonction  $H(x, y)$ .

**Théorème 12.** Une trajectoire de 7.1.2 vérifie pour tout  $t > 0$  :

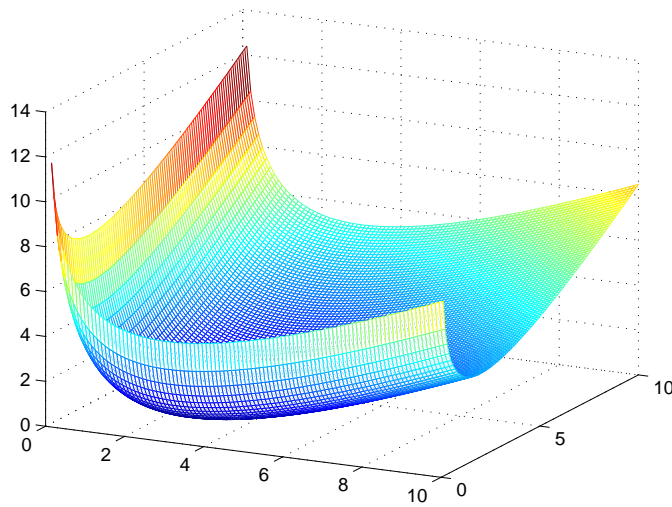
$$H(x(t), y(t)) = H(x_0, y_0)$$

avec

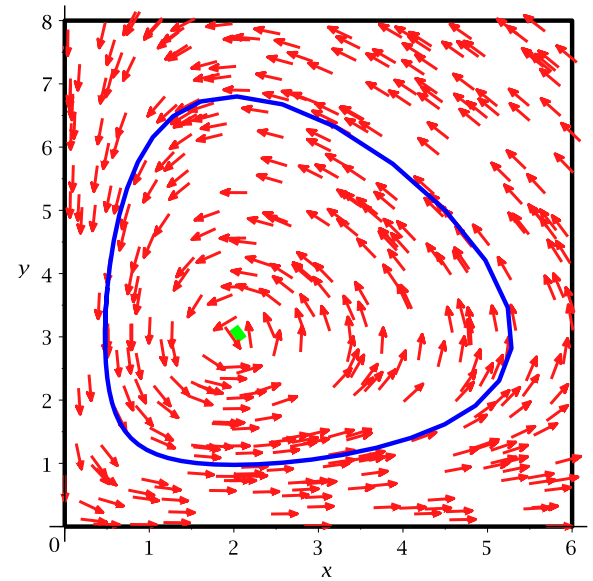
$$H(x, y) = -c \log x + x - a \log y + y.$$

La fonction  $H(x, y)$  est une fonction strictement convexe qui atteint son minimum en  $(x, y) = (c, a)$

On en déduit que les courbes de niveau  $\{(x, y) : H(x, y) = H(x_0, y_0)\}$  sont fermées et donc que les solutions de 7.1.2 sont périodiques.



Fonction  $H(x, y)$



Portrait de Phase du système proie-prédateur

Pour établir cette proposition on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.** 1- Si pour  $0 \leq t_0 \leq T$  on a  $x(t_0) = 0$  alors  $x(t) > 0$  sur  $[0, T]$ .  
 2- Si  $x_0 > 0$  alors  $x(t) > 0$  pour tout  $t > 0$ .  
 3- De même pour  $y(t)$  qui vérifie les deux propriétés précédentes.

**Preuve.** Si  $x(t_0) = 0$  alors on vérifie que  $(0, y_0 e^{-ct})$  est solution sur  $[t_0, T]$ . Elle est unique par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Si il existe  $t_0$  tel que  $x(t_0) = 0$  et  $t_0 > 0$  alors la trajectoire associée traverse l'axe des  $y$  en  $t = t_0 > 0$ . Par unicité ce n'est pas possible.

Enfin si  $x_0 > 0$  et si il existe  $t_0 > 0$  tel que  $x(t_0) < 0$  alors  $x(t)$  est nul pour un certain  $t_1$  (théorème des valeurs intermédiaires). Ceci n'est pas possible.  $\square$

**Preuve du théorème 12.** Soit  $(x(t), y(t))$  une trajectoire passant par  $(x_0, y_0) > (0, 0)$ . On a  $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{ax - xy}{-cy + xy}$ . Donc

$$\frac{(-c + x)\dot{x}}{x} = \frac{(a - y)\dot{y}}{y}.$$

Par le lemme 5 on sait que  $x(t)$ , et  $y(t)$  sont positifs. On peut alors intégrer. On obtient :

$$H(x(t), y(t)) = -c \log x(t) + x(t) - a \log y(t) + y(t) = \text{constante}.$$

La constante est égale à  $H(x_0, y_0)$ .

En dérivant on trouve  $\nabla H(x, y) = (-c/x + 1, -a/y + 1)$  et  $\text{Hessien}(H) = \text{diag}(c/x^2, a/y^2)$ . La proposition est démontrée.  $\square$

On étudie le comportement aux points d'équilibre donné par  $f(x, y) = 0$ , i.e.,

$$\begin{aligned} x(a - y) &= 0 \\ y(-c + x) &= 0. \end{aligned}$$

Soit  $(u, v)$  tel que  $f(u, v) = 0$ . La formule de Taylor décrit le comportement au voisinage d'un tel point :

$$f(x, y) = Df(u, v)(x - u, y - v) + o((x - u, y - v)).$$

L'idée est de dire que le comportement d'une solution du problème de Cauchy

$$\dot{x}, \dot{y} = f(x, y), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

quand  $(x_0, y_0)$  est suffisamment proche de  $(u, v)$  est celui de la solution de l'edo linéaire :

$$(\dot{X}, \dot{Y}) = Df(u, v)(X, Y), \quad X(0) = x_0 - u, \quad Y(0) = y_0 - v.$$

On dit qu'on a linéarisé l'edo non linéaire.

Dans le cas du système proie-prédateur on a deux point d'équilibre  $(0, 0)$  et  $(c, a)$ . De plus

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} a - y & -x \\ y & -c + x \end{bmatrix}.$$

**Étude en  $(0, 0)$ .** On a

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres sont de signes contraire. Le point  $(0, 0)$  est une source suivant l'axe des  $x$  (instabilité) et un puits suivant l'axe des  $y$  (stabilité).

**Étude en  $(c, a)$ .** On a

$$Df(c, a) = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ a & 0 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres sont imaginaires pures. Le point  $(c, a)$  est un centre.

## 7.2 Exemples de systèmes hamiltoniens en mécanique

De nombreux systèmes différentiels que l'on rencontre en mécanique sont basés sur les lois de Newton et s'écrivent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{bmatrix} \quad (7.2.3)$$

où  $q = (q_1, \dots, q_n)$  et  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . La fonction  $H(q, p)$  est appelée le hamiltonien du système. En général le hamiltonien est de classe  $C^1$  de sorte que le problème de Cauchy possède une solution unique.

La propriété fondamentale est la conservation de l'hamiltonien au cours du temps pour une condition initiale donnée.

**Proposition 7.** Soit  $(q(t), p(t))$  la solution de 7.2.3 telle que  $(q(t_0), p(t_0)) = (q_0, p_0)$ . Alors pour tout  $t > t_0$ ,

$$H(q(t), p(t)) = H(q_0, p_0).$$

Donc les trajectoires sont des courbes de niveau de l'hamiltonien.

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \dot{H}(q(t), p(t)) &= \frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial q} \dot{q}(t) + \frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial p} \dot{p}(t) \\ &= \frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial q} \frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial p} - \frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial p} \frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial q} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que  $H(q(t), p(t)) = H(p_0, q_0)$ .

### 7.2.1 Le pendule simple

Le hamiltonien associé au mouvement d'un pendule simple rigide est

$$H(\theta, p) = \frac{1}{2ml^2} p^2 + mg(1 - \cos \theta)$$

qui n'est autre que la somme de l'énergie cinétique et potentielle. Le système associé est

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{p}{ml^2} \\ \dot{p} &= -mgl \sin \theta. \end{aligned}$$

### 7.2.2 Le problème de Képler

Il s'agit d'étudier le mouvement d'un corps de masse  $m = 1$  (terre) autour d'un corps de masse  $M \gg 1$  (soleil). On se place dans un repère dont le soleil est l'origine et on note  $q$  la position de la terre dans ce repère. D'après la loi de gravitation universelle, les équations du mouvements'écrivent

$$\ddot{q} = -\frac{\mu q}{||q||^3}$$

où  $\mu = GM$ ,  $G$  la constante de gravitation universelle et  $|| \cdot ||$  la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^3$ . Le hamiltonien associé est

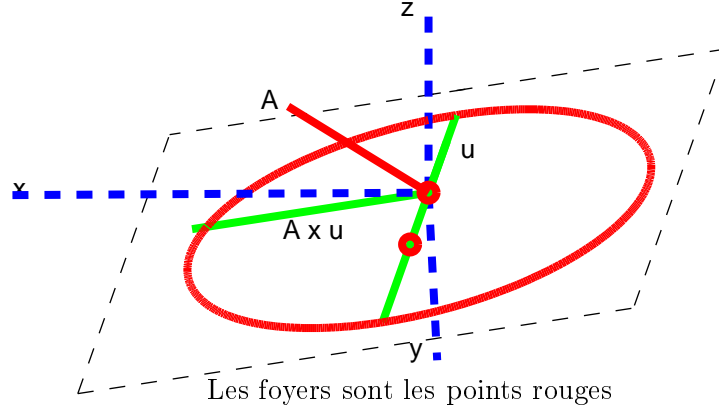
$$H(q, p) = \frac{1}{2} ||p||^2 - \frac{\mu}{||q||}.$$

Le système associé est

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\frac{\mu q}{||q||^3} \end{aligned}$$

On a le résultat suivant :

**Théorème 13.** Soit  $(q_0, p_0)$  un vecteur de conditions initiales pour le système terre-soleil. La trajectoire de la terre est une ellipse située dans le plan perpendiculaire à  $q_0 \wedge p_0$  et passant par l'origine.



**Preuve.** Le moment angulaire  $A(t) = q(t) \wedge p(t)$  est conservé au cours du temps puisque

$$\dot{A} = \dot{q} \wedge p + q \wedge \dot{p} = p \wedge p - \frac{\mu q \wedge q}{\|q\|^3} = 0.$$

Donc la trajectoire de la terre est dans un plan perpendiculaire au vecteur  $A(t) = q_0 \wedge p_0$ . On montre facilement que le vecteur

$$e(t) = \frac{1}{\mu} p(t) \wedge A(t) - \frac{q(t)}{\|q(t)\|}$$

est constant au cours du temps. Ce vecteur est dans le plan formé par les vecteurs  $q_0$  et  $p_0$ . On a

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \frac{1}{\mu} \dot{p}(t) \wedge A(t) - \frac{\dot{q}(t)}{\|q(t)\|} + \frac{q(t)^T \dot{q}(t)}{\|q(t)\|^3} \\ &= -\frac{1}{\mu} \frac{\mu q(t)}{\|q(t)\|^3} \wedge (q(t) \wedge p(t)) - \frac{p}{\|q(t)\|} + \frac{q(t)^T p}{\|q(t)\|^3} \\ &= -\frac{q(t)}{\|q(t)\|^3} (q(t)^T p(t)) + \frac{p}{\|q\|} - \frac{p}{\|q(t)\|} + \frac{q(t)^T p}{\|q(t)\|^3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a appliqué ci-dessus la formule  $a \wedge (b \wedge c) = (a^T c)b - (a^T b)c$ . maintenant on remarque par un calcul direct que :

$$q^T e + \|q(t)\| = \frac{\|A\|^2}{\mu}.$$

Donc le point  $q(t)$  est sur une ellipse dans un plan perpendiculaire au vecteur  $A$  et dont les foyers sont l'origine  $O$  et le point  $e$ . Le grand axe de l'ellipse est porté par  $Oe$ .  $\square$



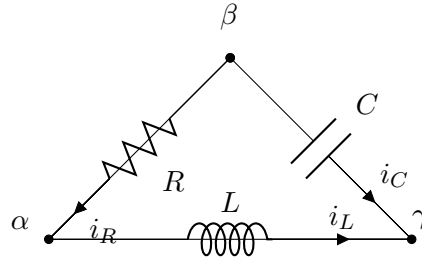


FIGURE 7.1 – Circuit RLC

### 7.3 Circuits électriques

On considère le circuit ci-dessus. Un circuit électrique est régi par les lois de Kirschoff.

$$\begin{aligned} i_R &= i_L = -i_C && \text{loi des courants} \\ v_R + v_L - v_C &= 0 && \text{loi des potentiels} \\ f(i_R) &= v_R && \text{loi d'Ohm généralisée} \end{aligned}$$

La loi de Faraday spécifie que

$$L\dot{i}_L(t) = v_L(t).$$

De même pour le condensateur

$$C\dot{v}_C(t) = i_C(t).$$

En tenant compte de toutes ces équations on trouve que ce circuit RLC est gouverné par

$$\begin{aligned} L\dot{i}_L(t) &= v_C(t) - f(i_L) \\ C\dot{v}_C(t) &= -i_L(t). \end{aligned}$$

Ce système est connu comme le système de Lienard. On peut l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - f(x) \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned}$$

Étudions le comportement de la solution autour d'un point d'équilibre, i.e.  $(0, f(0))$ . Le système linéarisé est donné par

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

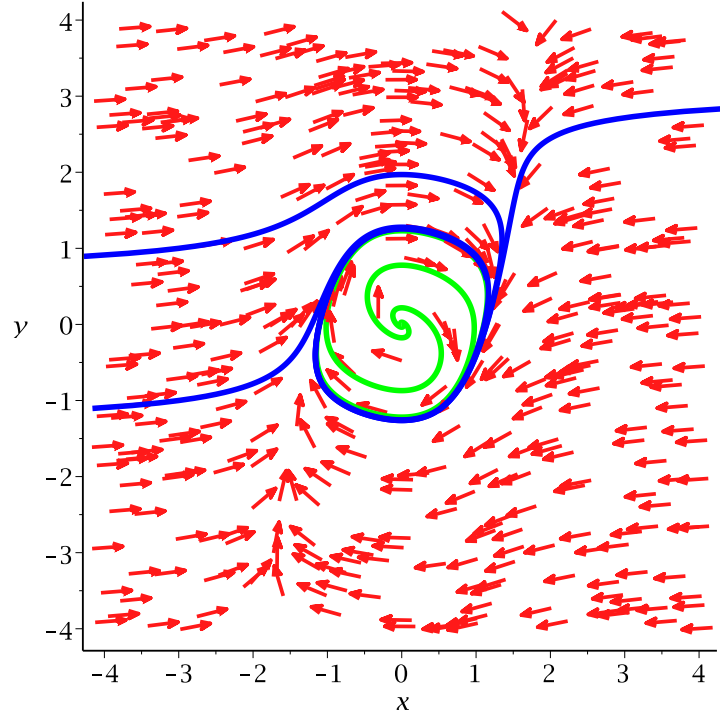
Les valeurs propres sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{-f'(0) \pm \sqrt{f'(0)^2 - 4}}{2}.$$

Ce point d'équilibre est un puits si  $f'(0) > 0$  et une source si  $f'(0) < 0$ . Un cas connu dans la littérature est l'équation de Van der Pol quand

$$f(x) = x^3 - x.$$

Dans ce cas  $f'(0) = -1$  et le point  $(0,0)$  est une source. Le portrait de phase est



On remarque qu'il y a une trajectoire limite périodique. Pour prouver (exercice) ceci on montre que

- 1- Une trajectoire passant par un point  $(x_0, y_0)$  traverse les quatre régions définies par l'axe des  $y$  et la courbe  $y = x^3 - x$ .
- 2- Si  $(x(t), y(t))$  est une trajectoire alors  $(-x(t), -y(t))$  est aussi une trajectoire.
- 3- Soient  $y \in \mathbb{R}$ ,  $p = (0, y)$  et la trajectoire telle que  $(x(0), y(0)) = p$ . D'après le 1 ci dessus il existe  $\bar{t}$  tel que  $(x(\bar{t}), y(\bar{t})) = (0, \bar{y})$  et  $y\bar{y} < 0$  et  $x(t) > 0$  pour  $0 < t < \bar{t}$ . Considérons alors l'application

$$\alpha : y \rightarrow \alpha(y) = \bar{y}.$$

Donc  $\alpha(y)$  est l'ordonnée du premier point intersection de l'axe des  $y$  négatif (resp. positifs) avec la trajectoire issue d'un point situé sur l'axe des  $y$  positifs (resp. négatifs). (faire un dessin). Alors la suite définie par

$$y_0 \in \mathbb{R}, y_{2k} = \alpha^{2k}(y_0)$$

est convergente.

Prouvons le 3. Étudions pour cela le signe de  $\delta(y) = \alpha(y)^2 - y^2$ . Soit  $C(x, y) = x^2 + y^2$ . On a

$$\begin{aligned} \delta(y) &= C(x(\bar{t}), y(\bar{t})) - C(x(0), y(0)) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \dot{C}(x(t), y(t)) dt \\ &= \int_0^{\bar{t}} x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) dt \\ &= \int_0^{\bar{t}} x(t)(y(t) - x(t)^3 + x(t)) - y(t)x(t) dt \\ &= \int_0^{\bar{t}} x(t)^2(1 - x(t)^2) dt. \end{aligned}$$

Si  $x(t) < 1$  alors  $\delta(y) > 0$  et  $|\alpha(y)| > |y|$ . D'autre part si  $x(t) > 1$  alors  $\delta(y) < 0$ . Puisque  $\delta$  est continue, on en déduit qu'il existe un  $y^*$  tel que  $|\alpha(y^*)| = |y^*|$ . Alors les points  $(0, y^*)$  et  $(0, -y^*)$  sont sur une trajectoire périodique. On en déduit que les suites  $(y_{2k})$  et  $(y_{2k+1})$  sont convergentes respectivement vers  $y^*$  et  $-y^*$ .  $\square$



Méthode d'Euler explicite  
pour  $\dot{x} = Ax$

exemple  $\dot{x} = ax$  donc  $x = x_0 e^{at}$   
 $x(0) = x_0$

la méthode d'Euler consiste à définir

$$t_{k+1} = t_k + h \quad h = \frac{T}{N} \quad N \geq 0$$

$$x_{k+1} = x_k + h a x_k \quad 0 \leq k \leq N$$

la question est

Est-ce que  $x_N$  est proche de  $x_0 e^{aT}$ ?

on a  $x_N = (1 + ha)^N x_0$

$$= \left(1 + \frac{ha}{N}\right)^N x_0$$

$$= (1 + ha)^{\frac{T}{h}} x_0$$

est-ce que  $x_N$  est proche de  $x_0 e^{aT}$ ?

ou encore  $\lim_{h \rightarrow 0} x_N = x_0 e^{aT}$  ①

Pour  $T$  fixé on a bien

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + ha)^{\frac{T}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{aT \frac{\log(1+ah)}{ah}} = e^{aT}$$

Supposons que  $a < 0$  et que  
alors  $\lim_{T \rightarrow \infty} x_0 e^{aT} = 0$

$\lim_{T \rightarrow \infty} x_N = 0$  si  $|1 + ha| < 1$

c'est à dire

$$h < -\frac{2}{a}$$



Cas  $\dot{x} = Ax$

$$x_{k+1} = x_k + hAx_k \in \mathbb{R}^n$$

C'est à dire

$$x_{k+1} = (I + hA)x_k$$

$$= (I + hA)^{k+1} x_0$$

cette suite de vecteurs converge si

$$\|I + hA\| < 1$$

Supposons que  $A = P^{-1}DP$

$$\text{Alors } I + hA = P^{-1}(I + hD)P$$

Il est donc nécessaire que

$$h < \left| \frac{2}{\lambda_{\max}} \right|$$

Méthode d'Euler simplifiée

pour  $\dot{x} = Ax$

(2)

$$t_{k+1} = t_k + h$$

$$h = \frac{T}{N}$$

$$x_{k+1} = x_k + hAx_{k+1}$$

$$k \geq 0$$

Donc

$$(I - hA)x_{k+1} = x_k$$

Si  $h$  est "petit"

$I - hA$  est inversible

$$x_{k+1} = (I - hA)^{-1} x_k$$

Finalement

$$x_N = \left( (I - hA)^{-1} \right)^N x_0$$



Si  $A = P^{-1} D P$

$$(I - hA)^{-1} = P^{-1} (I - hD)^{-1} P$$

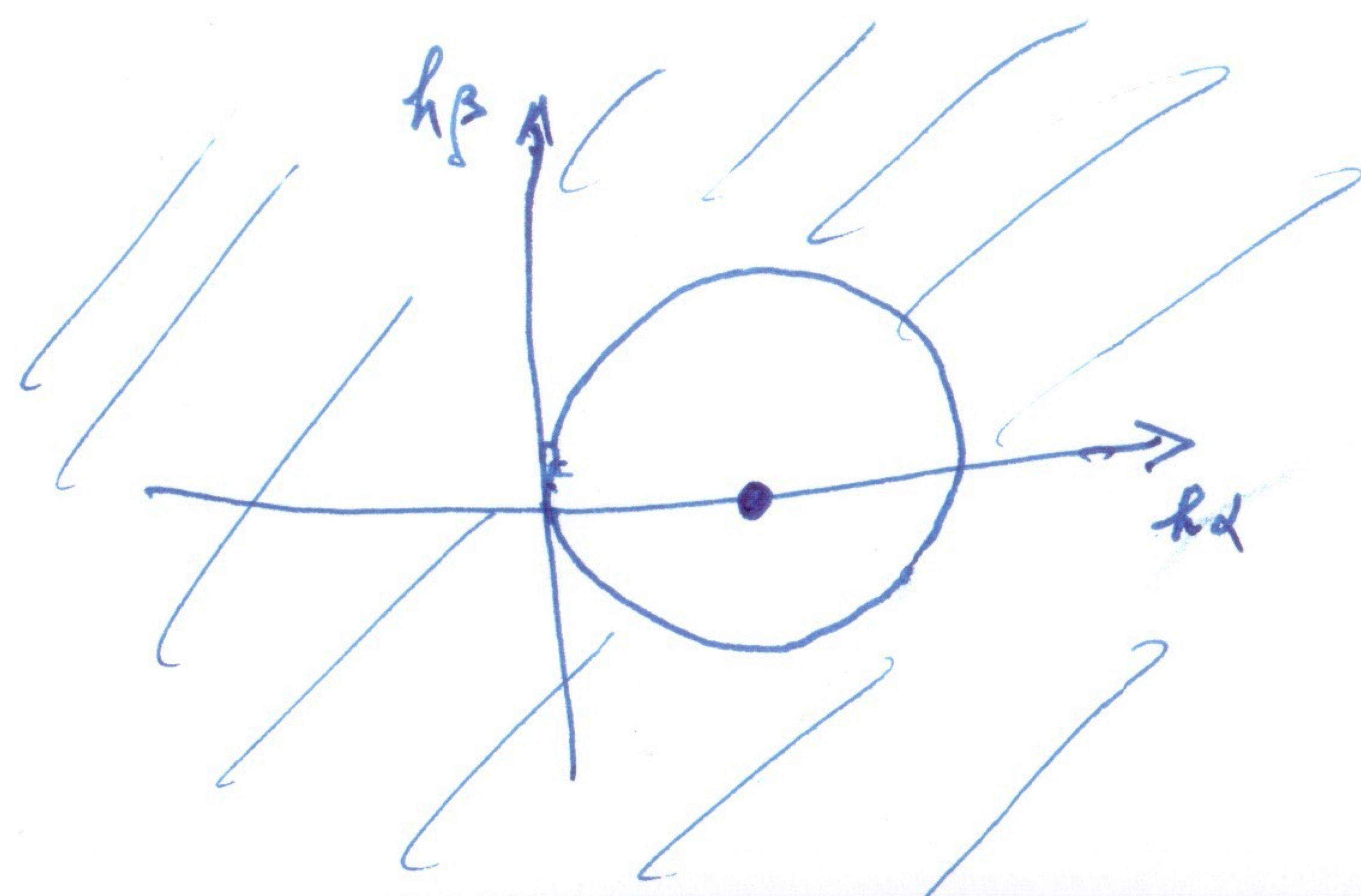
On doit avoir  $\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| < 1 \quad \lambda \in \mathbb{C}$

pour que  $x_N$  soit proche de  $x(T)$

i.e.  $|1 - h\lambda| > 1 \quad \lambda = \alpha + i\beta$

ou encore

$$(1 - h\alpha)^2 + h^2\beta^2 > 1$$



Comparaison avec la méthode  
d'Euler explicite

$$|1 + h\lambda| < 1$$

