

Feuille 4

Exercice 1. *Fonction non-solution d'une équation différentielle*

Soit la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = e^{-1/t^2}$ pour tout $t > 0$ et prolongée par $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ mais que f n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène.

Exercice 2. *Solution impaire*

Soit (E) l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

où $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues avec a impaire et b paire. Démontrer que (E) admet une unique solution impaire.

Exercice 3. *Solution qui s'annule*

Soit $p : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$. Soit y une solution de l'équation différentielle $y'' + py = 0$. Montrer que y s'annule au moins une fois.

Exercice 4. *Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire d'ordre 2*

Soient $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues (I est un intervalle de \mathbb{R}). On s'intéresse à l'équation

$$(E) : \quad u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0.$$

1) Soient $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ des réels donnés. Soit u_1 la solution de (E) vérifiant $u_1(0) = \alpha_1$ et $u_1'(0) = \beta_1$ et soit u_2 la solution de (E) vérifiant $u_2(0) = \alpha_2$ et $u_2'(0) = \beta_2$. On pose

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Calculer $W'(x)$ en fonction de $W(x), p(x)$ et $q(x)$.

2) Transformer (E) en une équation d'ordre 1 de la forme $U'(x) = A(x)U(x)$ avec $U : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $A : I \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ à déterminer.

3) Montrer que $W(x)$ correspond au Wronskien défini en cours $\det(R(x)X_1, R(x)X_2)$ où R est la résolvante associée à l'équation $U'(x) = A(x)U(x)$ et où $X_1 = (\alpha_1, \beta_1)^T$, $X_2 = (\alpha_2, \beta_2)^T$.

4) Constater que la formule obtenue à la question 1 est un cas particulier de la formule démontrée en cours : $W'(x) = \text{Tr}(A(x))W(x)$.

Exercice 5. *Solutions bornées*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable sur \mathbb{R}_+ . On considère l'équation

$$(E) : \quad y''(t) + f(t)y(t) = 0.$$

1) Soit y une solution bornée de (E) . Montrer que $y'(t)$ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

2) Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E) et leur Wronskien

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Montrer que W est constant.

3) En déduire que l'équation (E) admet une solution non bornée.

Exercice 6. Principe d'entrelacement de Sturm

L'objectif de cet exercice est de donner des indications qualitatives sur le nombre et la place des zéros de solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre. On suppose dans tout l'exercice que p et q sont deux fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1) Une seule équation. On considère l'équation

$$(E) : \quad y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

1.a) Soit f une solution non identiquement nulle de (E) . Montrer que les zéros de f sont isolés.

1.b) Soient f et g deux solutions indépendantes de (E) . On introduit le Wronskien de f et de g :

$$W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t).$$

i. Démontrer que

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(- \int_{t_0}^t p(u) du \right).$$

ii. Montrer que $W(t_0) \neq 0$.

iii. En déduire que si α et β sont deux zéros consécutifs de f (avec $\alpha < \beta$), alors il existe $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tel que $g(\gamma) = 0$.

2) Deux équations. On considère désormais deux équations d'ordre deux :

$$(E_1) : \quad y'' + p(t)y = 0,$$

$$(E_2) : \quad y'' + q(t)y = 0.$$

Et on suppose dans cette question que $p \leq q$. On considère f une solution non identiquement nulle de (E_1) et g une solution non identiquement nulle de (E_2) . Montrer que si α et β sont deux zéros consécutifs de f alors il existe $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tel que $g(\gamma) = 0$. (*Indication* : on introduira le 'pseudo-Wronskien' de f et g : $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$.)

3) Distance entre deux zéros consécutifs. Soit f une solution non identiquement nulle de l'équation

$$(E_1) : \quad y'' + p(t)y = 0.$$

Montrer que :

- si il existe $M > 0$ tel que $p(t) \leq M^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors deux zéros consécutifs de f sont distants d'au moins π/M ;

- si il existe $M > 0$ tel que $p(t) \geq M^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors dans tout intervalle I de longueur égale à π/M , f admet au moins un zéro dans I .

4) Application à l'équation de Bessel. On considère l'équation dite de Bessel :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0 \quad x \in]0, +\infty[$$

4.a) Effectuer le changement de fonction inconnue $y = v/\sqrt{x}$ pour ramener l'équation de Bessel à une équation du type étudiée dans les questions précédentes.

4.b) Montrer que pour toute solution de l'équation de Bessel, deux zéros consécutifs sont séparés d'au moins π lorsque $\lambda \geq 1/2$ et au contraire sont séparés d'au plus π lorsque $\lambda \leq 1/2$.