

**Feuille 3 (EDO linéaires : révisions de L1-L2)****Exercice 1. Ordre 1 et prolongements**

Soit l'équation différentielle

$$(1) \quad xy'(x) + 2y(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)^2}$$

- (1) Déterminer les différents intervalles sur lesquels l'équation est définie et peut être mise sous forme résolue.
- (2) Résoudre l'équation homogène sur chacun de ces intervalles.
- (3) Déterminer une solution particulière de (2).
- (4) En déduire l'ensemble des solutions de (2) sur chacun des intervalles précédents.
- (5) Existe-t-il des solutions sur  $] -1, 1[$  ?

**Exercice 2. Ordre 1 et prolongements**

Soit l'équation différentielle

$$(2) \quad 3xy'(x) - 4y(x) = x.$$

- (1) Déterminer les différents intervalles sur lesquels l'équation est définie et peut être mise sous forme résolue.
- (2) Déterminer l'ensemble des solutions de (2) sur chacun des intervalles précédents.
- (3) Déterminer l'ensemble des solutions de (2) sur  $\mathbb{R}$  tout entier (et commenter sa structure).

**Exercice 3. Ordre 1 et prolongements**

On considère l'équation différentielle suivante :

$$2xy' - (2 - \alpha - x)y = 0.$$

Pour quelles valeurs de  $\alpha$ , cette équation admet-elle des solutions (autres que la fonction nulle) définies et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  ? Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des solutions et commenter sa structure.

**Exercice 4. Ordre 2 : méthode de la variation des deux constantes**

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^x}.$$

**Exercice 5. Ordre 2 : méthode de la variation des deux constantes**

Soit l'équation différentielle

$$(3) \quad x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{x}{(x^2 + 4)}.$$

- (1) Déterminer les différents intervalles sur lesquels l'équation peut être mise sous forme résolue.
- (2) Chercher des solutions de l'équation homogène sous forme  $y(x) = x^\alpha$ .
- (3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
- (4) Déterminer une solution particulière de (3).
- (5) En déduire l'ensemble des solutions de (3) sur chacun des intervalles.

**Exercice 6. Ordre 2 : recherche d'une solution sous forme de série entière**

On recherche des solutions développables en série entière en 0 ( $x \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ , de rayon de convergence R) de l'équation différentielle suivante :

$$(4) \quad xy'' - y' + 4x^3y = 0$$

- (1) Trouver une relation de récurrence entre  $a_{n+4}$  et  $a_n$ .
- (2) Pour  $p \in \mathbb{N}$ , déterminer  $a_{4p+1}$  et  $a_{4p+3}$ .
- (3) Pour  $p \in \mathbb{N}$ , déterminer  $a_{4p}$  en fonction de  $a_0$  et de  $p$ . Déterminer  $a_{4p+2}$  en fonction de  $a_2$  et de  $p$ .
- (4) Calculer le rayon de convergence  $R$ .
- (5) Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de (5) sur  $\mathbb{R}$ . Préciser une base de  $\mathcal{S}$ .

**Exercice 7.** *Ordre 2 : recherche d'une solution sous forme de série entière*

On recherche des solutions développables en série entière en 0 ( $x \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ , de rayon de convergence  $R$ ) de l'équation différentielle suivante :

$$(5) \quad xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0.$$

- (1) Trouver une relation de récurrence entre  $a_{n+2}$  et  $a_n$ .
- (2) Pour  $p \in \mathbb{N}$ , déterminer  $a_{2p+1}$ .
- (3) Pour  $p \in \mathbb{N}$ , déterminer  $a_{2p}$  en fonction de  $a_0$  et de  $p$ .
- (4) Calculer le rayon de convergence  $R$ .
- (5) Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions développables en série entière en 0 de (5) sur  $\mathbb{R}$ . Quelle est la structure de  $\mathcal{S}$ ?

**Exercice 8.** *Ordre 2 : recherche d'une solution sous forme de série entière*

Rechercher l'ensemble des solutions développables en série entière en 0 des équations différentielles suivantes :

$$(6) \quad 2x^2 y''(x) - 3xy'(x) - 3y(x) = 1 + x^2.$$

$$(7) \quad 2x^2 y''(x) - 3xy'(x) - 3y(x) = 1 + x^3.$$

**Exercice 9.** *Système différentiel*

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_2(t) + \frac{e^t}{1+e^{-t}} \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 3x_2(t) + \frac{2e^t}{1+e^{-t}} \end{cases}$$

**Exercice 10.** *Système différentiel*

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
- (2) Soit  $N = A - I$  où  $I$  désigne la matrice identité. Montrer que  $N^3 = 0$ .
- (3) En déduire  $e^{tN}$  tout d'abord en fonction de  $I$ ,  $t$  et de  $N$ , puis uniquement sous forme d'une matrice  $3 \times 3$  à coefficients dépendants de  $t$ .
- (4) En déduire  $e^{tA}$ . (On utilisera le fait que  $e^{A+B} = e^A e^B$  lorsque  $A$  et  $B$  commutent).
- (5) Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

pour

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$