

Feuille 2

Exercice 1. *Etude du modèle proies-prédateurs*

Soient $a, b, c, d > 0$. Pour tout $x_0, y_0 \geq 0$, on souhaite décrire le comportement qualitatif de la solution du système

$$(S) : \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases}.$$

On rappelle que dans ce modèle, la quantité $x(t)$ représente la quantité de proies à l'instant t alors que $y(t)$ représente la quantité de prédateurs.

1) Montrer que pour tout $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution maximale au système (S) . On note $]T_*(x_0, y_0), T^*(x_0, y_0)[$ son intervalle de définition.

2) Déterminer les points d'équilibre de (S) .

3) Résoudre (S) pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 = 0$.

4) Résoudre (S) pour $x_0 = 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

5) Interpréter la solution lorsque $x_0 \geq 0$ et $y_0 = 0$. De même lorsque $x_0 = 0$ et $y_0 \geq 0$.

6) Dédire des questions 3 et 4 que, pour tout $x_0, y_0 > 0$, la solution de (S) vérifie $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ tant que la solution existe i.e. pour tout $t \in]T_*(x_0, y_0), T^*(x_0, y_0)[$.

7) Interpréter le résultat de la question 6.

8) Soit la fonction H définie par

$$H : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto dx - c \log x + by - a \log y. \end{cases}$$

On suppose $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ et on considère la solution (x, y) de (S) associée à (x_0, y_0) . Montrer que la quantité $Q(t) := H(x(t), y(t))$ est constante au cours du temps sur l'intervalle $]T_*(x_0, y_0), T^*(x_0, y_0)[$.

9) Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $H_{\alpha, \beta}(x) = -\alpha \log x + \beta x$. Faire le tableau de variations de la fonction $H_{\alpha, \beta}$ sur \mathbb{R}_+^* .

10) Remarquer que H peut s'écrire en fonction de $H_{a, b}$ et de $H_{c, d}$. Toujours dans le cas $x_0, y_0 > 0$, en déduire qu'il existe $x_1, x_2, y_1, y_2 > 0$ tels que

$$\forall t \in]T_*(x_0, y_0), T^*(x_0, y_0)[, \quad x_1 \leq x(t) \leq x_2 \quad \text{et} \quad y_1 \leq y(t) \leq y_2.$$

11) Quelle conséquence sur l'intervalle d'existence de la solution peut-on tirer du résultat de la question 10?

12) Déterminer le signe de $x'(t)$ et de $y'(t)$ selon la zone du plan dans lequel se situe $(x(t), y(t))$.

13) Quelle est la direction de la trajectoire dans chacune de ces zones?

14) Soit (x_0, y_0) tel que $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ et $(x_0, y_0) \neq (c/d, a/b)$. Montrer qu'il existe $t_1 > 0$ et $\tilde{t}_1 > t_1$ tels que $(x(\tilde{t}_1), y(\tilde{t}_1)) = (x(t_1), y(t_1))$.

15) En déduire que la solution est périodique.

16) Calculer les valeurs moyennes de x et de y sur une période.