

Feuille 1

Exercice 1. *Equations différentielles d'ordre supérieur*

Soit $k \geq 2$. Une équation différentielle scalaire d'ordre $k \geq 2$ est une équation différentielle de la forme :

$$(E) : \quad y^{(k)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$$

où $F : I \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ et où l'on cherche une fonction $y : J \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k sur son intervalle de définition J . Poser $Y = (y, y', \dots, y^{(k-1)})^T$ et montrer que le couple (y, J) est solution de l'équation (E) si et seulement si le couple (Y, J) est solution du système différentiel d'ordre 1 suivant

$$(\tilde{E}) : \quad Y'(t) = \mathcal{F}(t, Y(t))$$

où $\mathcal{F} : I \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ est à déterminer.

Exercice 2. *Deux trajectoires distinctes ne se coupent pas et, dans \mathbb{R} , les trajectoires sont ordonnées*

Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et soit l'équation

$$(E) : \quad y'(t) = F(t, y(t)).$$

Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E) définies sur le même intervalle J .

1) On suppose qu'il existe $t_0 \in J$ tel $y_1(t_0) = y_2(t_0)$. Alors montrer que $y_1(t) = y_2(t)$ pour tout $t \in J$.

2) On suppose qu'il existe $t_0 \in J$ tel $y_1(t_0) < y_2(t_0)$. Alors montrer que $y_1(t) < y_2(t)$ pour tout $t \in J$.

Exercice 3. *Une résolution explicite*

1) Résoudre formellement l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

2) Justifier le calcul.

Exercice 4. *Trajectoires périodiques*

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) \mapsto f(t, x) \end{cases}$ une fonction globalement Lipschitz par rapport à x sur tout compact en t , et telle que f est T -périodique en t i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(t + T, x) = f(t, x).$$

1) Montrer que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur \mathbb{R} .

2) Montrer que y est T -périodique si et seulement si il existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tel que $y(t_1 + T) = y(t_1)$.

Exercice 5.

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et soit u une solution de $u'(t) = F(u(t))$ que l'on suppose définie sur tout \mathbb{R} et telle que $u(t) \rightarrow l \in \mathbb{R}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Démontrer que l est un point d'équilibre de l'équation i.e. que $F(l) = 0$.

Exercice 6.

On considère l'équation différentielle suivante

$$x'(t) = t^2 + x(t)^2.$$

- 1) Justifier l'existence d'une solution maximale x vérifiant $x(0) = 0$. Que sait-on de l'intervalle J sur lequel x est définie ?
- 2) Montrer que x est une fonction impaire et que J est de la forme $] - a, a[$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Indication : introduire $\tilde{x}(t) = -x(-t)$ et \tilde{J} l'intervalle symétrique de J .
- 3) Etudier la monotonie et la convexité de x sur J . Dessiner l'allure de la courbe au voisinage de $t = 0$.
- 4) Démontrer que J est un intervalle borné de \mathbb{R} . Indication : supposer que $a = +\infty$ et montrer que $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t \geq 1, \arctan x(t) \geq t + C$. En déduire une contradiction.)
- 5) Montrer que $x(t) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow a$ et $x(t) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow -a$ et compléter le dessin donnant l'allure de x .

Exercice 7.

On considère l'équation différentielle suivante

$$x'(t) = x(t)\sin(x(t))^2.$$

- 1) Quelles sont les solutions constantes de cette équation ?
- 2) Soit x une solution maximale vérifiant $x(0) = x_0$. Montrer que x est bornée et monotone sur son intervalle de définition J (et préciser la monotonie en fonction de x_0)
- 3) Démontrer que x est définie sur \mathbb{R} tout entier.
- 4) Montrer que x admet des limites lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ et les déterminer.

Exercice 8. *Modèle logistique de population*

Soit l'équation

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avec $a > 0, N > 0$ donnés.

- 1) Pour tout $x_0 \geq 0$, démontrer que ce problème admet une unique solution maximale x . On note J son intervalle de définition.
- 2) Quels sont les x_0 qui sont points d'équilibre ?
- 3) Soit $x_0 \in [0, N]$. Etudier la monotonie de la solution et montrer qu'elle est globale i.e. $J = \mathbb{R}$.
- 4) Soit $x_0 > N$. Etudier la monotonie de la solution et montrer que J est de la forme $J =] - \alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$.
- 5) Déterminer la limite en $+\infty$ de x .