Exercice 7 feuille TD 6.

3) f est continue $\Rightarrow$ $f^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé c'est un fermé

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker} f$ est fermé

4). Comme f n'est pas continue, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers x telle que $f(x_n)$ ne tend pas vers $f(x)$.

Alors, $y_n = f(x_n)x - f(x)x_n$ est dans le noyau de f car

$f(y_n) = f(x_n)f(x) - f(x)f(x_n) = 0$ Mais $f(x_n)$ ne tend pas vers $f(x)$

Donc si y_n converge sa limite n'est pas dans le noyau. Celui-ci n'est donc pas fermé.

Exercice 4 1) $u_n \in \mathbb{C}$ $\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{n} \in \mathbb{C}$ $(u_n) \in E$ donc $\sum |u_n|^2 < +\infty$ car $u_n = 0$ $\forall n \geq N$.

Convergence: $\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{n} \right|^2 \leq \left(\sum_1^N |u_n|^2\right)\left(\sum_1^N \frac{1}{n^2}\right)$ par Cauchy Schwarz

par passage à la limite

$\Rightarrow$ $|\phi(u)|^2 \leq \|u\|^2 \frac{\pi^2}{6}$ $\Rightarrow$ $|\phi(u)| \leq \frac{\pi^2}{6} \|u\|$.

d'où la continuité de ϕ qui est clairement linéaire.

2) S'il existe $a \in E$ tel que $\phi(u) = \langle u, a\rangle$ pour tout $u \in E$ alors pour $u = e_k = (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0 \dots 0)$

on a $\phi(e_k) = \frac{1}{k} = a_k$ et donc $a = \left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

3). Mais $a = \left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas dans E car n'est pas nulle à partir d'un certain rang.

E n'est donc pas complet sinon le théorème de Riez donnerait l'existence d'un $a \in E$ tel que $\phi(u) = \langle u, a\rangle$ $\forall u \in E$.