Université Paul Sabatier
Licence L3 ESR 2016–2017
Arithmétique

Examen de deuxième session, 19/06/2017, durée : 1 h 30.

Ajouté le 20/06 : en guise de corrigé, on pourra consulter
Tom M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory* p. 32-33 pour le premier exercice et
Anne Bauval, *Preuve simplifiée du théorème de Serret sur les nombres équivalents* pour le second.

Exercice 1. La fonction de von Mangoldt Λ est définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^m \text{ pour un nombre premier } p \text{ et un entier } m \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

2) Rappeler la définition du produit de convolution de Dirichlet $f * g$ de deux fonctions $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$.
3) Quel est l'élément neutre pour $*$? (justifier).
4) En déduire que

$$\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d) \ln(d),$$

où μ désigne la fonction de Möbius (l'inverse pour $*$ de la fonction constante $\mathbf{1}$).

Tourner la page

Exercice 2. *Un formulaire sur les fractions continues est rappelé en bas de cette page.*

On note $\sim$ la relation d'équivalence sur les irrationnels "avoir un quotient complet commun". Autrement dit, si deux irrationnels $x = [a_0, a_1, \dots]$ et $y = [b_0, b_1, \dots]$ ont pour suites de quotients complets (x_n) et (y_n) :

$$x \sim y \iff \exists r, s \in \mathbb{N} \quad x_r = y_s.$$

1) Justifier brièvement les deux propriétés suivantes :
   (a) avec les mêmes notations :
$$x_r = y_s \iff \forall k \in \mathbb{N} \quad a_{r+k} = b_{s+k} \iff \forall k \in \mathbb{N} \quad x_{r+k} = y_{s+k} \ ;$$
   (b) pour tout irrationnel x :
$$\boxed{\text{Lemme 1 : } \forall a \in \mathbb{Z} \quad a + x \sim x.}$$
2) On considère d'autre part l'action, sur l'ensemble des irrationnels, du groupe $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ (les matrices 2×2 à coefficients entiers et de déterminant ± 1), donnée, pour tout irrationnel x, par :
$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \qquad M \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}.$$
   Démontrer que (pour tous irrationnels x et y) :
$$\text{si} \quad x \sim y \quad \text{alors} \quad \exists M \in G \quad y = M \cdot x.$$

La suite de l'exercice va consister à démontrer la réciproque, à l'aide du lemme 1 ci-dessus et des lemmes 2 et 3 suivants, élémentaires mais admis faute de temps : pour tout irrationnel x,

$$\boxed{\text{Lemme 2 : } -x \sim x.} \quad \boxed{\text{Lemme 3 : } \tfrac{1}{x} \sim x.}$$

3) Soient x, y deux irrationnels dans la même orbite pour l'action de G. Il existe donc $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que
$$ad - bc = \pm 1 \quad \text{et} \quad y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$
   Montrer qu'on peut même choisir a, b, c, d tels que de plus, $(c, d) = (0, 1)$ ou $c > 0$.
4) Montrer que si $(c, d) = (0, 1)$ alors $y \sim x$ (utiliser les lemmes 1 et 2).
5) On étudie maintenant le second cas : $c > 0$. On choisit alors, parmi les deux développements du rationnel $\frac{a}{c}$ en fraction continue finie, celui dont la longueur n est de parité telle que
$$ad - bc = (-1)^n.$$
   On le note
$$\frac{a}{c} = [a_0, \dots, a_{n-1}]$$
   et l'on note h_i, k_i (pour $i < n$) les numérateurs et dénominateurs des réduites associées.
   Démontrer successivement :
   (a) $a = h_{n-1}$ et $c = k_{n-1}$;
   (b) $\exists r \in \mathbb{Z} \quad b = rh_{n-1} + h_{n-2} \quad$ et $\quad d = rk_{n-1} + k_{n-2}$;
   (c) $\frac{ax+b}{cx+d} = [a_0, \dots, a_{n-1}, x + r]$;
   (d) et enfin (en utilisant les lemmes 1 et 3) : $y \sim x$.

Rappels sur les fractions continues (notations et formules).

- $[X] = X$, $[X, Y] = X + \frac{1}{Y}$ et $\forall q \in \{1, \dots, p\} \quad [X_0, \dots, X_p] = [X_0, \dots, X_{q-1}, [X_q, \dots, X_p]]$.
- On pose $h_{-1} = 1$ et $k_{-1} = 0$. À toute suite (finie ou infinie) (a_i), avec $a_i \in \mathbb{N}^*$ sauf $a_0 \in \mathbb{Z}$, est ensuite associée une suite (de même longueur) de couples d'entiers (h_i, k_i) ("numérateurs et dénominateurs des **réduites**") vérifiant :
$$k_i > 0, \quad [a_0, \dots, a_i] = \frac{h_i}{k_i}, \quad [a_0, \dots, a_i, X] = \frac{h_i X + h_{i-1}}{k_i X + k_{i-1}} \quad \text{et} \quad h_i k_{i-1} - h_{i-i} k_i = (-1)^{i+1}.$$
- Tout **irrationnel** x a **un** développement en fraction continue **infinie** $[a_0, a_1, \dots]$, et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des "**quotients complets**" vérifie :
$$x = [a_0, \dots, a_{n-1}, x_n] \quad \text{et} \quad x_n = [a_n, a_{n+1}, \dots].$$
- Tout **rationnel** x a **deux** développements en fractions continues **finies**, dont les longueurs sont deux entiers consécutifs.