Université Paul Sabatier
Licence L3 ESR 2016–2017
Arithmétique

Corrigé de l'examen du vendredi 13 janvier 2017

Exercice 1.

1) $\left(\frac{-6}{p}\right) = \left(\frac{-2}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}(-1)^{\frac{(p-1)(3-1)}{4}}\left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\left(\frac{p}{3}\right)$ est égal à 1 si et seulement si $(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \left(\frac{p}{3}\right) = 1$ ou $(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \left(\frac{p}{3}\right) = -1$.
$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = 1 \Leftrightarrow 16 \mid (p+1)(p-1) \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \mod 8$ et $\left(\frac{p}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow p \equiv 1 \mod 3$, donc
$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = -1 \Leftrightarrow p \equiv \pm 3 \mod 8$ et $\left(\frac{p}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow p \equiv -1 \mod 3$.
2) $b^2 - 4ac = -24$ (donc b pair), $0 \leq |b| \leq a \leq \sqrt{24/3} < 3$. Pour $a = 2$: $|b| = 2$ impossible ($4 - 8c \neq -24$) donc $b = 0$ et $c = 3$. Pour $a = 1$: $b = 0$ et $c = 6$.
3) p est de l'une de ces deux formes si et seulement si -24 est un carré mod p c'est-à-dire si p vérifie les conditions de la question précédente. Par ailleurs, modulo 3, $2x^2+3y^2 \equiv -x^2 \not\equiv 1$ et $x^2+6y^2 \equiv x^2 \not\equiv -1$. Donc p est de la forme x^2+6y^2 si et seulement si $p \equiv 1 \mod 3$ et $p \equiv \pm 1 \mod 8$, c'est-à-dire $p \equiv 1$ ou 7 mod 24, et p est de la forme $2x^2+3y^2$ si et seulement si $p \equiv -1 \mod 3$ et $p \equiv \pm 3 \mod 8$, c'est-à-dire $p \equiv 5$ ou 11 mod 24.
4) De l'identité $(x^2+6y^2)(x'^2+6y'^2) = (xx'-6yy')^2 + 6(xy'+yx')^2$ on déduit le premier cas, mais aussi (en remarquant que $2x^2+3y^2 = \frac{(2x)^2+6y^2}{2}$) les deux autres :
$(2x^2+3y^2)(2x'^2+3y'^2) = (2xx'-3yy')^2 + 6(xy'+yx')^2$ et
$(2x^2+3y^2)(x'^2+6y'^2) = 2(xx'-3yy')^2 + 3(2xy'+yx')^2$.

Exercice 2.

1) (a) $\delta(n) = \sum_{d|n, d \text{ impair}} (-1)^{(d-1)/2} = \sum_{d|n, d\equiv 1 \mod 4} 1 + \sum_{d|n, d\equiv 3 \mod 4}(-1) = d_1(n) - d_3(n)$.
(b) Si m ou n est pair, $\chi(mn) = 0 = \chi(m)\chi(n)$. Si m et n sont impairs, $\chi(mn) = (-1)^{(mn-1)/2}$ et $\chi(m)\chi(n) = (-1)^{(m-1+n-1)/2}$ sont encore égaux car les deux exposants sont de même parité puisque $\frac{mn-1}{2} - \frac{m+n-2}{2} = \frac{(m-1)(n-1)}{2}$ est pair. Donc χ est complètement multiplicative. Donc $\delta = \mathbf{1} * \chi$ est multiplicative (mais pas complètement, cf. question suivante), comme convolée de Dirichlet de deux fonctions (complètement) multiplicatives.
(c) $\delta(p^k) = \sum_{j=0}^{k} \chi(p^j)$. Si $p = 2$, $\chi(p^j) = 1$ si $j = 0$ et 0 si $j > 0$ donc $\delta(p^k) = 1$. Si $p \equiv 1 \mod 4$, $\chi(p^j) = 1$ donc $\delta(p^k) = k+1$. Si $p \equiv 3 \mod 4$, $\chi(p^j)$ vaut alternativement 1 et -1 donc $\delta(p^k) = 1$ si k pair et 0 si k impair.
(d) $\sum_{d\geq 1} \chi(d)\frac{X^d}{1-X^d} = \sum_{d\geq 1}\chi(d)X^d \sum_{k\in\mathbb{N}} X^{dk} = \sum_{d\geq 1, k\in\mathbb{N}} X^{d(k+1)}\chi(d) = \sum_{n\geq 1} X^n \sum_{d|n}\chi(d) = \sum_{n\geq 1}\delta(n)X^n$.
2) (a) Quand on développe $\left(\sum_{a\in\mathbb{Z}} X^{a^2}\right)\left(\sum_{b\in\mathbb{Z}} X^{b^2}\right)$, on obtient une série dans laquelle le coefficient de X^n est égal par définition à $r(n)$.
(b) D'après la question précédente et la question 1.a (et puisque $r(0) = 1$), on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $r(n) = 4(d_1(n) - d_3(n))$ si et seulement si la série formelle $\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} X^{j^2}\right)^2$ est égale à $1 + 4\sum_{n\geq 1}\delta(n)$, c'est-à-dire (d'après la question 1.d) à $1 + 4\sum_{d\geq 1}\chi(d)\frac{X^d}{1-X^d}$, ou encore (par définition de χ) à $1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4X^{4k+1}}{1-X^{4k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4X^{4k+3}}{1-X^{4k+3}}$.
3) (a) L'égalité voulue se déduit des suivantes :

$$(q^4;q^4)_\infty = (q^2;q^2)_\infty\,(-q^2;q^2)_\infty = (q;q)_\infty\,(-q;q)_\infty\,(-q^2;q^2)_\infty$$
$$(-q^3;q^4)_\infty\,(-q;q^4)_\infty = (-q;q^2)_\infty$$
$$(-q^2;q^2)_\infty\,(-q;q^2)_\infty = (-q;q)_\infty.$$

(b) L'égalité voulue se déduit des suivantes :

$$(q;q)_\infty = (q;q^2)_\infty\,(q^2;q^2)_\infty$$
$$\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(-q;q)_\infty} = (q;q)_\infty.$$

4) (a)

$$x\,\theta\left(\sqrt{q},-x^2\sqrt{q}\right)=x\,\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-x^2\sqrt{q})^j(\sqrt{q})^{j^2}=\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j x^{2j+1}q^{j(j+1)/2}=$$

(en séparant en $j=2k$ et $j=2k-1$)

$$x\sum_{k\in\mathbb{Z}}x^{4k}q^{2k^2+k}-x^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}x^{4k}q^{2k^2-k}=x\,\theta(q^2,x^4q)-x^{-1}\,\theta(q^2,x^4/q).$$

(b) D'après la question précédente et de la formule de Jacobi, on a égalité entre d'une part $x\,\theta\left(\sqrt{q},-x^2\sqrt{q}\right)=$

$$(q,q)_\infty\,(x^2q;q)_\infty\,x\,(x^{-2};q)_\infty=(q,q)_\infty\,(x^2q;q)_\infty\,(x-x^{-1})\,(x^{-2}q;q)_\infty$$

et d'autre part $x\,\theta(q^2,x^4q)-x^{-1}\,\theta(q^2,x^4/q)=$

$$x\,(q^4;q^4)_\infty\,(-x^4q^3;q^4)_\infty\,(-x^{-4}q;q^4)_\infty-x^{-1}\,(q^4;q^4)_\infty\,(-x^4q;q^4)_\infty\,(-x^4q^3;q^4)_\infty.$$

(c) La dérivée en $x=1$ du premier membre est

$$(1+1^{-2})\,(q;q)_\infty^3+(1-1^{-1})\times\cdots=2\,(q;q)_\infty^3.$$

Celle du second membre est

$$(q^4;q^4)_\infty\,(-q^3;q^4)_\infty\,(-q;q^4)_\infty\left(1+\sum_{k\geq 0}\frac{4q^{4k+3}}{1+q^{4k+3}}+\sum_{k\geq 0}\frac{-4q^{4k+1}}{1+q^{4k+1}}\right)$$

$$-(q^4;q^4)_\infty\,(-q;q^4)_\infty\,(-q^3;q^4)_\infty\left(-1+\sum_{k\geq 0}\frac{4q^{4k+1}}{1+q^{4k+1}}+\sum_{k\geq 0}\frac{-4q^{4k+3}}{1+q^{4k+3}}\right)$$

$$=2(q^4;q^4)_\infty\,(-q^3;q^4)_\infty\,(-q;q^4)_\infty\left(1+\sum_{k\geq 0}\frac{4q^{4k+3}}{1+q^{4k+3}}+\sum_{k\geq 0}\frac{-4q^{4k+1}}{1+q^{4k+1}}\right).$$

En divisant ces deux résultats par 2, on obtient l'égalité voulue.

(d)

$$1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4q^{3+4k}}{1+q^{3+4k}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-4q^{1+4k}}{1+q^{1+4k}}$$

est égal à

$$\frac{(q;q)_\infty^3}{(q^4;q^4)_\infty\,(-q^3;q^4)_\infty\,(-q;q^4)_\infty}$$

d'après la question précédente, donc à

$$\left[\,(q^2;q^2)_\infty\,(q;q^2)_\infty^2\right]^2$$

d'après la question 3, donc à

$$\theta(-q,1)^2\ \text{(ou encore : }\theta(q,-1)^2\text{)}$$

d'après la formule du triple produit de Jacobi, c'est-à-dire à

$$\left(\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-q)^{j^2}\right)^2\ \text{(ou encore : }\left(\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^jq^{j^2}\right)^2\text{)}$$

par définition de θ.

(e) En remplaçant q par $-X$, on obtient le théorème annoncé dans la question 2.b.