Université Paul Sabatier
Licence L3 ESR 2016–2017
Arithmétique

Examen du vendredi 13 janvier 2017, 13 h 30 - 16 h 30

Barème indicatif sur 30 points

Exercice 1. (4+2+3+3=12 pts) Soit un nombre premier $p > 3$.

1) Montrer que -6 est un carré modulo p si et seulement si p est congru soit à $\pm 1 \mod 8$ et à $1 \mod 3$, soit à $\pm 3 \mod 8$ et à $-1 \mod 3$.

   (Rappel de la loi de réciprocité quadratique : $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$, et pour q premier impair $\neq p$, $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$.)
2) Montrer que les deux seules formes (quadratiques entières positives) réduites de discriminant -24 sont $x^2 + 6y^2$ et $2x^2 + 3y^2$.
3) En déduire que p est de la forme $x^2 + 6y^2$ si et seulement s'il est congru à 1 ou 7 modulo 24, et qu'il est de la forme $2x^2 + 3y^2$ si et seulement s'il est congru à 5 ou 11 $\mod 24$.
4) Montrer que si deux entiers N_1, N_2 sont représentés tous deux par $x^2 + 6y^2$ ou tous deux par $2x^2 + 3y^2$ alors N_1N_2 est représenté par $x^2 + 6y^2$, et que si l'un est représenté par $x^2 + 6y^2$ et l'autre par $2x^2 + 3y^2$ alors N_1N_2 est représenté par $2x^2 + 3y^2$.

Exercice 2.

1) (1+2+1,5+2=6,5 pts) On définit χ et δ sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\chi(n) := \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{puis} \quad \delta(n) := \sum_{d|n} \chi(d).$$

   (a) Démontrer que $\delta(n) = d_1(n) - d_3(n)$, où $d_1(n)$ (resp. $d_3(n)$) est le nombre de diviseurs de n congrus à 1 (resp. à 3) modulo 4.
   (b) Montrer que χ est complètement multiplicative et en déduire que δ est multiplicative.
   (c) Pour p premier et $k \in \mathbb{N}$, calculer $\delta(p^k)$ dans chacun des trois cas suivants : $p = 2$, $p \equiv 1 \mod 4$, $p \equiv 3 \mod 4$.
   (d) Vérifier que

$$\sum_{d \geq 1} \chi(d) \frac{X^d}{1 - X^d} = \sum_{n \geq 1} \delta(n) X^n.$$

2) (0,5+1=1,5 pts) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r(n)$ le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $n = a^2 + b^2$ (par exemple : $r(0) = 1$ et $r(5) = 8$).
   (a) Expliquer pourquoi

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} X^{j^2}\right)^2 = \sum_{n \geq 0} r(n) X^n.$$

   (b) L'objet de la suite du problème est de démontrer le théorème de Jacobi suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad r(n) = 4(d_1(n) - d_3(n)).$$

   Déduire de ce qui précède que ce théorème équivaut à :

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} X^{j^2}\right)^2 = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4X^{4k+1}}{1 - X^{4k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4X^{4k+3}}{1 - X^{4k+3}}.$$

Tourner la page

3) (2+1,5=3,5 pts) On rappelle la définition du symbole de Pochhammer

$$(u;v)_\infty := \prod_{k=0}^{\infty}(1-uv^k).$$

Démontrer que

(a)

$$(q^4;q^4)_\infty\ (-q^3;q^4)_\infty\ (-q;q^4)_\infty = (-q;q)_\infty^2 (q;q)_\infty.$$

(b)

$$\frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty} = (q;q^2)_\infty^2\ (q^2;q^2)_\infty.$$

4) (1+1+2+2+0,5=6,5 pts) On définit la série formelle :

$$\theta(y,z) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} z^j y^{j^2}.$$

(a) Démontrer que

$$x\ \theta\left(\sqrt{q}, -x^2\sqrt{q}\right) = x\ \theta(q^2, x^4 q) - x^{-1}\ \theta(q^2, x^4/q).$$

(b) On rappelle la formule du triple produit de Jacobi :

$$\theta(y,z) = (y^2;y^2)_\infty\ (-zy;y^2)_\infty\ (-z^{-1}y;y^2)_\infty.$$

En déduire (à l'aide de la question précédente et en remarquant que $x\ (x^{-2};q)_\infty = (x - x^{-1})\ (x^{-2}q;q)_\infty$) :

$$(x-x^{-1})\ (q;q)_\infty\ (x^2q;q)_\infty\ (x^{-2}q;q)_\infty =$$
$$x\ (q^4;q^4)_\infty\ (-x^4q^3;q^4)_\infty\ (-x^{-4}q;q^4)_\infty - x^{-1}\ (q^4;q^4)_\infty\ (-x^4q;q^4)_\infty\ (-x^{-4}q^3;q^4)_\infty.$$

(c) En évaluant en $x=1$ la dérivée formelle par rapport à x des deux membres de l'égalité ci-dessus (pour le second, on utilisera sans justification la formule $\left(\prod_k(1+u_k)\right)' = \prod_k(1+u_k)\sum_j \frac{u_j'}{1+u_j}$), en déduire :

$$(q;q)_\infty^3 = (q^4;q^4)_\infty\ (-q^3;q^4)_\infty\ (-q;q^4)_\infty \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4q^{3+4k}}{1+q^{3+4k}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-4q^{1+4k}}{1+q^{1+4k}}\right).$$

(d) À l'aide de la question 3 et la formule du triple produit de Jacobi, en déduire :

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-q)^{j^2}\right)^2 = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4q^{3+4k}}{1+q^{3+4k}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-4q^{1+4k}}{1+q^{1+4k}}.$$

(e) Conclure (cf. question 2.b).