

TD3 : Équations différentielles linéaires : calculs

1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

1.1 Exemple 1 : équation homogène

On considère

$$(E_1) : xu' - 3u = 0.$$

a) Résoudre (E_1) sur $]0, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 0[$. Vérifier que sur chacun de ces intervalles, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1.

b) Résoudre le problème de Cauchy associé sur $]0, +\infty[$ avec la condition initiale

$$u(1) = 2.$$

c) Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}$. Vérifier que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel ; quelle est sa dimension 1 ?

d) Résoudre le problème de Cauchy associé sur $\mathbb{R}$ avec la condition initiale

$$u(0) = 1.$$

1.2 Exemple 2 : équation non homogène

On considère

$$(E_2) : \sqrt{|x|}u' - u = x.$$

a) Résoudre l'équation homogène associée à (E_2) sur $]0, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 0[$.

b) Utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver sur $]0, +\infty[$ une solution particulière, et en déduire la solution générale de (E_2) sur $]0, +\infty[$.

c) Déterminer la solution générale de (E_2) sur $]-\infty, 0[$.

d) Déterminer la solution générale de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

1.3 Solution particulière dans certains cas

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et Q un polynôme de degré n. On considère

$$(E_3) : u' - \alpha u = Q(x)e^{\beta x}.$$

a) On considère la fonction

$$u(x) = P(x)e^{\beta x}.$$

À quelle condition sur P est-elle solution de (E_3) ?

b) On suppose que $\beta \neq \alpha$. On considère l'application :

$$\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], \quad P \mapsto P' - (\beta - \alpha)P.$$

Montrer qu'elle est linéaire, injective et surjective. En déduire que (E_3) admet une solution particulière de la forme $u(x) = P(x)e^{\beta x}$ avec P polynôme de même degré que Q.

c) On suppose que $\beta = \alpha$. Montrer que (E_3) admet une solution particulière de la forme $u(x) = P(x)e^{\beta x}$, avec P polynôme et préciser le degré de P.

1.4 Problème d'origine géométrique

On se place dans le plan muni du repère orthonormé. Déterminer l'ensemble des courbes $y = f(x)$ telles que si M est un point de la courbe et N désigne l'intersection de la normal e en M à la courbe et de l'axe $(0x)$, le milieu I de $[MN]$ est sur la parabole d'équation $y^2 = x$.

1.5 Problème d'origine étrange

Un élastique a une extrémité fixe O et une extrémité mobile M. On étire l'élastique par le point M à une vitesse constante et égale à v (le point M se déplace sur la droite (Ox)). À l'instant $t = 0$ la longueur de l'élastique est ℓ.

Une fourmi F marche sur l'élastique à vitesse constante w. À l'instant initial $t = 0$, elle se trouve en O. La fourmi arrivera-t-elle en M ?

2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

2.1 Équations à coeffs constants et homogènes

On considère
$$(E_4) : ay'' + by' + cy = 0,$$
avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Montrer que $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_4) si et seulement si
$$ar^2 + br + c = 0.$$

On considère alors le "polynôme caractéristique" de l'équation :
$$P(r) = ar^2 + br + c.$$

2.1.1 Le cas $b^2 - 4ac > 0$

On appelle r_1, r_2 les deux racines réelles de P.

b) Montrer que pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,
$$y(x) := C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$
est solution de (E_4).

c) On va montrer la réciproque : soit y solution de (E_4) et $z(x) := y(x)e^{-r_1 x}$. Montrer que z est solution d'une équation différentielle du premier ordre, la résoudre et montrer qu'il existe C_1, C_2 tels que
$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

d) Conclusion : quel est l'ensemble des solutions de (E_4) ?

2.1.2 Le cas $b^2 - 4ac = 0$

e) Adapter ce qui précède et déterminer l'ensemble des solutions de (E_4) dans ce cas.

2.1.3 Le cas $b^2 - 4ac < 0$

Cette fois le polynôme caractéristique a deux racines complexes non réelles r_1, r_2.

f) Déterminer l'ensemble des solutions de (E_4) à valeurs complexes.

g) Vérifier que si y est une solution de (E) à valeurs réelles, elle est aussi solution de (E_4) à valeurs complexes, et réciproquement, que si Y est une solution de (E_4) à valeurs complexes, alors sa partie réelle est solution de (E_4) à valeurs réelles. En déduire la forme générale des solutions à valeurs réelles de (E_4).

2.2 Équations à coeffs constants, mais non homogènes

a) On considère

$$(E_5) : y'' + 3y' - 4y = e^{2x} :$$

- résoudre l'équation homogène associé,
- déterminer une solution particulière de la forme Ce^{2x},
- en déduire la solution générale de (E_5).

b) On considère

$$(E_6) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x} :$$

- résoudre l'équation homogène associée,
- déterminer une solution particulière de la forme $P(x)e^{-x}$ avec P polynôme,
- en déduire la solution générale de (E_6).

c) On considère

$$(E_7) : y'' - y' + y = 2x^2e^{-x} :$$

- résoudre l'équation homogène associée,
- déterminer une solution particulière de la forme $P(x)e^{-x}$ avec P polynôme,
- en déduire la solution générale de (E_7).

d) On considère

$$(E_8) : y'' + by' + cy = Q(x)e^{\beta x},$$

avec Q polynôme ;

- on suppose que $\beta^2 + b\beta + c \neq 0$: montrer que (E_8) a une solution particulière de la forme $P(x)e^{\beta x}$ avec P de même degré que Q ;
- on suppose que $\beta^2 + b\beta + c = 0$: comment se modifie le cas précédent ?

2.3 Équations à coeffs non constants

On considère

$$(E_9) : xy'' + 2y' + xy = 0.$$

- on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$: à l'aide du changement de fonction inconnue $z(x) = xy(x)$, déterminer toutes les solutions de (E_9) sur $\mathbb{R}_+^*$;
- déterminer toutes les solutions de (E_9) sur $\mathbb{R}$.

3 Systèmes d'équations différentielles linéaires

3.1 Système homogène, matrice diagonalisable

On considère le système différentiel

$$(S_1) : X'(t) = A_1 X(t)$$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Résoudre le système différentiel (S_1) ;
- montrer que l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel ; quelle est sa dimension ?
- résoudre le problème de Cauchy

$$X'(t) = A_1 X(t) \quad \text{et} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3.2 Système non homogène, matrice diagonalisable

On considère le système différentiel

$$(S_2) : X'(t) = A_2 X(t) + B(t)$$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ avec

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -2t+2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Résoudre le système différentiel homogène associé à (S_2) ;
- trouver une solution particulière ;
- en déduire la solution générale de (S_2).

3.3 Système homogène, matrice non diagonalisable

On considère le système différentiel

$$(S_3) : X'(t) = A_3 X(t)$$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ avec

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A_3 ;
- déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ qui trigonalise A_3 ;
- en déduire la solution générale de (S_3).