

Avril 2016

Questions de cours examen L3 Math Fonda
Algèbre & Groupes.

1) Tous les énoncés, toutes les définitions, toutes les preuves déjà listées pour le partial + les preuves des énoncés suivants:

Proposition. Soient N et H deux sous-groupes d'un groupe $(G, *)$. Si N est normal dans G alors NH est un sous-groupe de $(G, *)$

Théorème. Si N et H sont deux sous-groupes d'un groupe $(G, *)$ alors G est isomorphe au produit direct $N \times H$ si et seulement si :

1) N et H sont normaux dans G 2) $NH = G$ 3) $N \cap H = e_G$.

Théorème. Si H est le sous-groupe d'un groupe abélien libre de rang n alors H est abélien libre de rang 2 et $0 \leq 2 \leq n$.

Théorème. Soit p un nombre premier, $p \geq 2$ alors

1) $\# GL_n(\mathbb{F}_p) = p^{n(n-1)/2} (p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \dots (p - 1)$

2) $GL_n(\mathbb{F}_p)$ possède un p -Sylow S .

Théorème. $\# G = k p^m$ où p est premier, $p \geq 2$ et $m \geq 1$.

Montrer que tous les p -Sylow de G sont conjugués.

Theorème Soit N un sous-groupe normal de G .
 Soit $0 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/N \rightarrow 0$ la suite exacte
 courte où i est l'inclusion et π la projection de
 G sur G/N . Montrez que G est produit semi-direct
 de N par $H \iff$ il existe un sous-groupe H de
 G tel que la restriction π' de π à H soit un
 isomorphisme de H sur G/N .

Proposition. Si E est un espace vectoriel euclidien ou
 $\dim_{\mathbb{R}} E = n$ et si V est un sous-espace vectoriel de E
 montrez que $E = V \oplus V^\perp$.

Proposition. Si $u \in O(E)$ et si $u(V) \subset V$ alors $u(V^\perp) \subset V^\perp$.

Theorème. Si $\dim_{\mathbb{R}} E = 2$ et si $u \in O(E)$ alors soit
 u est une rotation soit u est une symétrie orthogonale
 d'axe une droite vectorielle.

Proposition. Le centre de $O(E)$ est $\{\pm \text{id}_E\}$.

Lemme. K corps quelconque et E est un K -espace vectoriel
 de dimension n . Si $u \in GL(E)$ est tel que
 $u(D) = D$ pour toute droite vectorielle D alors u est une homothétie.

Proposition. Si u est une transvection d'hyperplan H et de
 droite D et si $f \in GL(E)$ alors $v = f \circ u \circ f^{-1}$ est une
 transvection d'hyperplan $f(H)$ et de droite $f(D)$.

Proposition. Le groupe des homothéties est le centre
 de $GL(E)$.