

L3 Groupes Serie 1

Janvier 2016.

Exercice 1. Donner la table de multiplication de tous les groupes d'ordre 4. Combien y a-t-il (à isomorphisme près) de groupes d'ordre 4?

Exercice 2. Pour  $n \geq 2$  on note  $S_n$  le groupe des permutations de  $n$  éléments.

- 1) Montrer que les transpositions (notées  $\tau_{ij}$ ,  $i < j$ ) engendrent  $S_n$ .
- 2) Montrer que la signature  $\text{sgn}: S_n \rightarrow \mathbb{F}_2$  est le seul homomorphisme surjectif de  $S_n$  sur  $\mathbb{F}_2 = \{\pm 1\}$ .

Exercice 3. Donner la table de multiplication et la liste des sous-groupes de  $S_3$ .

Exercice 4. Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  deux éléments de  $GL_2(\mathbb{C})$ .

Notons  $Q$  le sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{C})$  engendré par  $A$  et  $B$ .

- 1) Déterminer la table de multiplication de  $Q$ .
- 2) Donner la liste des sous-groupes de  $Q$ .

Exercice 5. On munit  $\mathbb{R}^2$  de sa structure complexe et on note  $\Delta$  le carré régulier de sommets  $\pm 1$  et  $\pm i$ .

Soit  $D_4$  le groupe des isométries qui laissent invariant le carré  $\Delta$ .

- 1) Déterminer la table de multiplication de  $D_4$ .
- 2) Donner la liste des sous-groupes de  $D_4$ .
- 3)  $D_4$  peut-il être isomorphe au groupe  $Q$  de l'exercice 4.

Janvier 2016.

### L3. Groupes Serie 2.

Exercice 1. Soit  $f: (G, *) \rightarrow (H, \circ)$  un homomorphisme de groupes. On suppose que  $a \in G$  est d'ordre  $n$ . Montrer que l'ordre de  $f(a)$  divise  $n$ .

Exercice 2. Soit  $(C_n, *)$  un groupe cyclique d'ordre  $n$ . Notons  $a$  un générateur de  $C_n$ .

- 1) Si  $b$  est un élément d'ordre  $d$  de  $C_n$  calculer l'ordre du sous-groupe  $H$  de  $C_n$  engendré par  $b$ .
- 2) Montrer que tout sous-groupe  $G$  de  $C_n$  est cyclique.

Exercice 3. 1) Déterminer tous les homomorphismes de groupes de  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$  vers  $(S_3, \circ)$   
2) Déterminer tous les homomorphismes de groupes de  $(S_3, \circ)$  vers  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ .

Exercice 4. Notons  $\pi: \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  l'homomorphisme de groupes défini par  $\pi(\overline{1}) = \overline{1}$ .

- 1) Calculer  $\ker \pi$ .
- 2) Pour quels entiers  $n, n \geq 2$ , l'homomorphisme  $\pi': \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  défini par  $\pi'(\overline{1}) = \overline{1}$  existe-t-il ?
- 3) Si  $\pi'$  est défini, quelles sont les conditions supplémentaires sur  $n$  pour que  $\pi$  passe au quotient  $\bar{\pi}: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ , c.a.d. pour que  $\bar{\pi}$  existe tel que  $\pi = \bar{\pi} \circ \pi'$ .



Février 2016.

# Algèbre II L3 Groupes

## Série 3

Exercice 1. Soit  $O_2(\mathbb{R})$  le groupe orthogonal de  $(2 \times 2)$ -matrices.  
Déterminer le centre et le groupe des commutateurs de  $O_2(\mathbb{R})$ .

Exercice 2. 1) Montrer que  $A_n$ ,  $n \geq 3$ , est engendré par les 3-cycles.  
2) Calculer le centre et le groupe des commutateurs de  $A_n$ .  
3) Calculer le centre et le groupe des commutateurs de  $S_n$ .

Exercice 3. On considère l'action conjugaison  $C: A_5 \times A_5 \rightarrow A_5$ .

- 1) Déterminer les orbites et les stabilisateurs des 5-cycles.
- 2) Déterminer les classes de conjugaison  $W_C(\tau)$   $\forall \tau \in A_5$ . Déterminer l'espace des orbites  $A_5 / \sim_C$ .
- 3) Vérifier la formule des classes pour  $A_5$  muni de l'action conjugaison.

Rappel  $C(g, \tau) = g \circ \tau \circ g^{-1}$   
 $W_C(\tau) = \{ g \circ \tau \circ g^{-1}, g \in A_5 \}$