

ALGEBRE L3

Automne 2015

Exercices

Feuille 8

1. Soient X un espace topologique, $A = C(X)$ l'anneau de fonctions continues $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \in X$,

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\},$$

A_x l'anneau de germes des fonctions continues en x .

(a) Définir un morphisme canonique d'anneaux

$$\phi_x : A_{\mathfrak{m}} \longrightarrow A_x$$

(b) Soit $X = \mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle; montrer que ϕ_x est un isomorphisme.

Catégories et foncteurs

2. Soient \mathcal{C} une catégorie, $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$.

(a) Montrez que

$$\text{Hom}(x, ?) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ens}$$

est un foncteur, et

$$\text{Hom}(?, x) : \mathcal{C}^{\text{opp}} \longrightarrow \text{Ens}$$

est un foncteur.

(b) Prenons $\mathcal{C} = \text{Ens}$.

(b1) Montrez qu'un morphisme $f : x \longrightarrow y$ est injectif ssi pour tout $z \in \text{Ob}\mathcal{C}$

$$f_* : \text{Hom}(z, x) \longrightarrow \text{Hom}(z, y)$$

est injectif.

(b2) Montrez qu'un morphisme $f : x \longrightarrow y$ est surjectif ssi pour tout $z \in \text{Ob}\mathcal{C}$

$$f^* : \text{Hom}(y, z) \longrightarrow \text{Hom}(x, z)$$

est injectif.

3. (a) Montrez que la règle

$$x \mapsto \text{Hom}(?, x)$$

définit un foncteur

$$h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^\vee$$

où \mathcal{C}^\vee est la catégorie dont les objets sont des foncteurs

$$\mathcal{C}^{\text{opp}} \longrightarrow \text{Ens}$$

et morphismes sont des transformations naturelles.

(b) *Lemme de Yoneda*. Montrez que h est pleinement fidèle, i.e.

$$h : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}^\vee}(h(x), h(y))$$

pour tous $x, y \in \text{Ob}\mathcal{C}$.