

ALGEBRE L3

Automne 2015

Exercices

Feuille 6

1. Soient A_1, A_2 deux anneaux commutatifs. Montrez que les idéaux de

$$A = A_1 \times A_2$$

sont tous de la forme

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$$

où \mathfrak{a}_i est un idéal dans A_i .

En déduire que

$$\mathrm{Spec} A \cong \mathrm{Spec} A_1 \coprod \mathrm{Spec} A_2$$

où les sous-espaces

$$\mathrm{Spec} A_i \subset \mathrm{Spec} A$$

sont ouverts et fermés.

2. *Critère d'Eisenstein.* Soient

$$f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[t],$$

et p un nombre premier qui divise tous a_i et tel que p^2 ne divise pas a_0 .

Montrez que $f(t)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[t]$.

3. *Lemme de Gauss.* (i) Un polynôme

$$f(t) = \sum a_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$$

est dit *primitif* si $\mathrm{pgcd}(a_i) = 1$.

Montrez que le produit $f = f_1 f_2$ de deux polynômes primitifs est primitif.

Idée. Soit p un nombre premier. Montrez, en passant à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[t]$, que si p ne divise pas un de coefficients de f_1 et un de coefficients de f_2 , alors p ne divise pas un de coefficients de f .

- (ii) Soit $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$. Alors on peut écrire

$$f(t) = c(f)g(t)$$

où $c(f) \in \mathbb{Q}$ et $g(t) \in \mathbb{Z}[t]$ est primitif.

Le nombre $c(f)$ est défini au signe près et est appelé *le contenu* de f .

(iii) Montrez que

$$c(fg) = c(f)c(g).$$

(iv) En déduire que si $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[t]$, alors il est irréductible dans $\mathbb{Q}[t]$.

4. Montrez que

$$f(t) = 1 + t + \dots + t^p,$$

p étant un nombre premier, est irréductible dans $\mathbb{Q}[t]$.

Idée. Appliquer le critère d'Eisenstein à $f(t+1)$.