

ALGEBRE L3

Automne 2015

Exercices

Feuille 5

1. Soient A un anneau commutatif, $f \in A$,

$$i : A \longrightarrow A_f$$

le morphisme canonique,

$$\phi = i^* : \operatorname{Spec} A_f \longrightarrow \operatorname{Spec} A,$$

$$\phi(\mathfrak{q}) = i^{-1}(\mathfrak{q}).$$

Montrez que ϕ induit une bijection

$$\operatorname{Spec} A_f \xrightarrow{\sim} D_f := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\}.$$

L'application inverse

$$\psi : D_f \longrightarrow \operatorname{Spec} A_f$$

est définie par

$$\psi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_f := \{b/f^n \mid b \in \mathfrak{p}\}.$$

2. Montrez que

$$D_f \cap D_g = D_{fg}.$$

3. Il s'en suit de l'ex. 2 que les sous-ensembles D_f forment une base d'une topologie, dite *la topologie de Zariski* sur $\operatorname{Spec} A$.

Montrez que les fermés dans cette topologie sont les sous-ensembles

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid I \subset \mathfrak{p}\},$$

I étant un idéal de A .

4. Montrez que si

$$\phi : A \longrightarrow B$$

est un morphisme des anneaux, l'application

$$\phi^* : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

est continue.

5. Soient A un anneau intègre, K son corps de fractions. Montrez que

$$A_{\mathfrak{p}} = \cup_{f \notin \mathfrak{p}} A_f \subset K$$