

ALGEBRE L3

Automne 2015

Exercices

Feuille 4

1. Soient $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux, $\mathfrak{b} \subset B$ un idéal. Montrez que f induit une inclusion

$$\bar{f} : A/(\mathfrak{b} \cap A) \hookrightarrow B/\mathfrak{b}.$$

2. (Des cas particuliers du critère d'Eisenstein.) Soient

$$f(t) = t^2 + a_1 t + a_0 \in \mathbb{Z}[t],$$

p un nombre premier qui divise a_1, a_2 , et tel que p^2 ne divise pas a_0 .

Montrez qu'il n'existe pas d'une décomposition dans $\mathbb{Z}[t]$

$$f = f_1 f_2$$

avec $\deg f_1 = \deg f_2 = 1$.

Pareil pour $f(t)$ de degré 3.

3. Soit F un corps fini. (a) Soit p le nombre naturel minimal tel que $p \cdot 1_F = 0$. Montrez que p est premier.

(b) Montrez que $|F| = p^n$ pour certain n .

4. Montrez que l'idéal

$$(x, y) \subset k[x, y]$$

(k étant un corps) est maximal.

5. Soit

$$A = k[x^2, x^3] \subset k[x]$$

le sous-anneau minimal contenant x^2 et x^3 .

Montrez que A n'est pas factoriel.