

ALGEBRE L3

Automne 2015

Exercices

Feuille 3

1. Soient p_1, \dots, p_n des nombres premiers distincts. Montrez que

$$\prod_{i=1}^n (1 - p_i^{-1})^{-1} = \sum_{n=p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}, k_i \geq 0} \frac{1}{n}.$$

En déduire l'infinité de nombres premiers.

2. Soit A un anneau intègre. Montrez que pour $f, g \in A$, $(f) = (g)$ ssi il existe $u \in A$ tel que $f = ug$.

3. Un anneau $A = \{0\}$ ssi $0 = 1$ dans A .

4. Un morphisme $f : k \rightarrow A$ d'un corps k dans un anneau $A \neq \{0\}$ est injectif.

5. (a) Demontrez le théorème de Bezout dans $A = k[x]$, k étant un corps:
si $f, g \in k[x]$ sont deux polynômes irréductibles alors il existent $p, q \in k[x]$ tels que

$$pf + qg = 1.$$

- (b) Si $f \in k[x]$ est irréductible, alors $k[x]/(f)$ est un corps.

Si p est un nombre premier, alors $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.

6. Trouvez des polynômes irréductibles de degré 2 dans $\mathbb{F}_2[x]$, $\mathbb{F}_3[x]$.

En déduire des exemples des corps finis à 4 et à 9 éléments.

7. (a) Montrez que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est euclidien par rapport à la norme

$$N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - b^2d$$

pour $d = -1, -2$.

- (b) Pour $d \in \mathbb{Z}, d \equiv 1 \pmod{4}$, considérons le sous-groupe

$$A_d = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_d = \{a + b\omega_d \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

2

où

$$\omega_d = \frac{1 + \sqrt{d}}{2}$$

Montrez que A_d est un anneau.

Montrez que A_d est euclidien par rapport à la norme

$$N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - b^2d$$

pour $d = -3, -7, -11$.