

# ALGEBRE L3

Automne 2015

## Exercices

### Feuille 2

1. Soient  $k$  un corps (sous-entendu: commutatif).

(a) Soit

$$f(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i) \in k[x]$$

un polynôme sans racines multiples ("*séparable*"). Montrez que le morphisme

$$k[x] \longrightarrow k^n, \quad p \mapsto (p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n))$$

induit un isomorphisme d'anneaux

$$\phi : k[x]/(f) \cong k^n \quad (*)$$

Montrez que  $\{\bar{x}^i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$  est une base de  $k[x]/(f)$  comme un  $k$ -espace vectoriel, et voyez que la matrice de  $\phi$  est la matrice de Vandermonde.

(b) Soit

$$f = \prod_{i=1}^m f_i$$

où  $f_i \in k[x]$  sont unitaires, irréductibles et distincts.

Montrez que

$$k[x]/(f) \cong \prod_{i=1}^m K_i$$

où  $K_i$  sont des corps.

(c) Soit  $I$  un idéal dans un anneau commutatif  $A$ . Les idéaux de  $A/I$  sont en bijection avec les idéaux  $J \subset A$  contenant  $I$ .

(d) Trouvez tous les idéaux de  $k[x]/(f^n)$  où  $f$  est un polynôme irréductible.

Considérez d'abord le cas particulier  $k[x]/(x^n)$  ("un point gros").

2. Demontrez l'isomorphisme des anneaux

$$\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}.$$

3. Montrez que tous les idéaux dans  $k[x]$ ,  $k$  étant un corps, sont principaux.

4. Soient  $A$  un anneau commutatif,  $\mathfrak{p} \subset A$  un idéal. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(a)  $A/\mathfrak{p}$  est intègre;

(b) si  $x, y \in A$ ,  $xy \in \mathfrak{p}$  alors soit  $x \in \mathfrak{p}$  soit  $y \in \mathfrak{p}$ .

Si ses conditions sont remplies, on dit que  $\mathfrak{p}$  est un idéal **premier**.

(c) Trouver les idéaux premiers de  $\mathbb{Z}$ ; de  $k[x]$  ( $k$  un corps).

5. Soient  $f : A \longrightarrow B$  un morphisme des anneaux commutatifs,  $\mathfrak{p} \subset B$  un idéal premier. Montrez que  $f^{-1}(\mathfrak{p})$  est un idéal premier de  $A$ .