

ALGEBRE L3

Automne 2015

Exercices

Feuille 1

Rappels

0. Soit $f : G \longrightarrow H$ un homomorphisme de groupes surjectif. Montrez que f induit un isomorphisme

$$\bar{f} : G / \text{Ker } f \xrightarrow{\sim} H$$

Exemples des anneaux

1. Un idéal bilatère $I \subset A$ dans un anneau A pas forcément commutatif est un sous-groupe additif tel que pour tout $x \in I, a, b \in A, axb \in I$.

Exemple: $(x) = Ax A$.

Soit $A = M_n(k)$ où k est un corps ("un corps" veut dire toujours un corps commutatif).

Montrez que si $I \subset A$ est un idéal bilatère alors soit $I = (0)$, soit $I = A$.

2. Anneau du groupe. Soient A un anneau commutatif, G un groupe, $A[G]$ - l'ensemble des expressions

$$\sum_{g \in G} a_g g, \quad a_g \in A,$$

où tous a_g sauf un nombre fini sont 0.

On introduit sur cet ensemble:

l'addition:

$$\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g;$$

multiplication:

$$(ag)(bh) = (ab)gh.$$

(a) Ceci définit sur $A[G]$ une structure d'un anneau unitaire: justifiez, calculez

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \left(\sum_{g \in G} b_g g\right).$$

(b) Trouvez une inclusion d'anneaux

$$i : A \hookrightarrow A[G].$$

(c) Montrez que $A[\mathbb{Z}]$ est isomorphe à l'anneau de polynômes de Laurent $A[t, t^{-1}]$.

(d) Introduisez la notion de l'anneau du monoïde $A[M]$ et identifiez $A[\mathbb{N}]$ avec $A[t]$.

(e) Décrire l'anneau $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$.

3. Deuxième structure. Supposons que G soit fini. On peut identifier $A[G]$ avec l'ensemble de fonctions $a : G \longrightarrow A$ et introduire l'addition et multiplication de manière usuelle:

$$\begin{aligned}(a + b)(g) &= a(g) + b(g), \\ (ab)(g) &= a(g)b(g).\end{aligned}$$

Est-ce que ce sont les mêmes opérations que dans Ex. 2?

4. Considérez l'exemple de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Montrez que

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \cong \mathbb{C}^n$$

comme les anneaux.

5. Théorème de restes chinois. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ premiers entre eux. Établir l'isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$